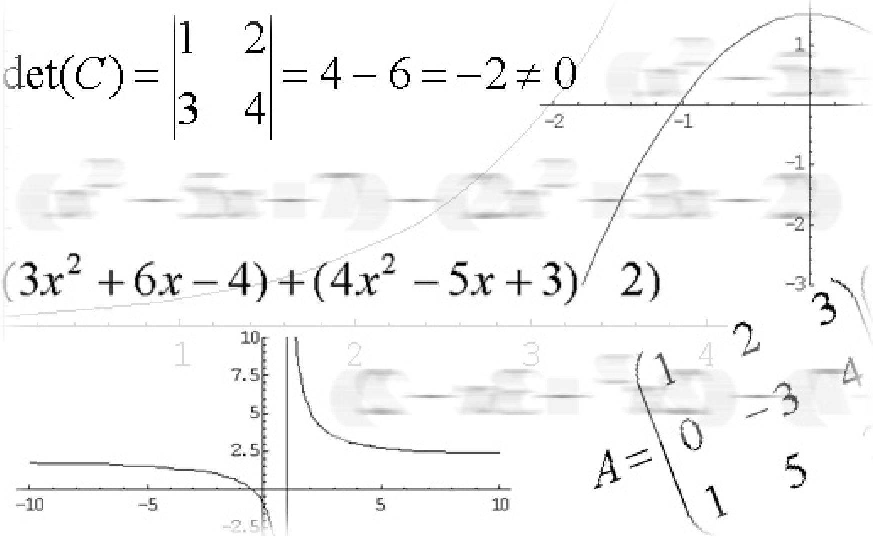
المملكــة العربيــة الســعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

محاسبة – تسويق – مكتبية

رياضيات تخصصية

١١١ ريض



مقدمه

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية " لمتدربي قسم" محاسبة – تسويق – مكتبية " للكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله رب العالمين, والصلاة والسلام على رسوله رائد البشرية ومعلمها الأول, ورحمة الله المهداة إليها, لتخرج به من الظلمات إلى النور, وعلى من والاه واهتدى بهديه إلى يوم الدين, أما بعد. فإن مقرر رياضيات تخصصية -١ يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لطلبة قسم الإدارة لتعليم الطالب المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها الطالب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للطالب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة والمسائل المباشرة والتي يمكن أن يتعرض لها الطالب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح. لقد تم تحرير حلول الأمثلة بدقة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد الطالب استيعاب القوانين الأساسية للرياضيات وتمكنه من كيفية استعمالاتها في مسائل مختلفة لرفع من مهاراته وقدراته ومنهجيته في تحرير الحلول والربط بين هذه القوانين والمسائل التطبيقية. ودراسة هذا المقرر ستمكن الطالب من:

- الإلمام بمفهوم المجموعات والعمليات عليها و معرفة نظم الأعداد والعمليات عليها
- كيفية تحليل كثيرات الحدود والإلمام بطرق حل المعادلات والمتراجحات الخطية
- الإلمام بفهم واستخدام الأسس واللوغاريتمات
- معرفة مفهوم الدالة وكيفية رسم بعض الدوال المشهورة بيانيا
- الإلمام بفهم المتتابعات والمتسلسلات
- معرفة القواعد الأساسية لطرق العد

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى خمسة وحدات رئيسة:

تعنى الوحدة الأولى لتعريف الطالب بأساسيات الرياضيات في مفهوم المجموعات والعمليات عليها والتمكن من العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الحقيقية وتحديد الفترات. فيتوجب على طالب قسم الإدارة أن يلم بهذه المواضيع. وتهدف هذه الوحدة إلى تحقيق هذا الغرض وقد قسمت إلى فصلين

في الفصل الأول نتطرق إلى تعريف المجموعة وخصائصها,العمليات على المجموعات (تقاطع -اتحاد –فرق) كما نتطرق إلى متممة المجموعة وقانون ديمورغان.

وفي الفصل الثاني نتعرض إلى تعريف مجموعة الأعداد والعمليات الحسابية على مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الحقيقية. وكيفية تحديد الفترات.

و خصصت الوحدة الثانية لدراسة مفهوم كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها كما نتطرق لكيفية تحليل كثيرات الحدود بطرق مختلفة وقد قسمت هذه الوحدة إلى فصلين

في الفصل الأول ندرس كثيرات الحدود والعمليات عليها وكيفية تحليلها بطرق مختلفة منها طريقة العامل المشترك وطريقة استخدام القانون العام و إكمال المربع.

وفي الفصل الثاني نتطرق إلى معنى وكيفية حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية وحل المتراجحات الخطية وتحديد الفترات التي تحقق مجموعة حلول المتراجحات الخطية ذات مجهول واحد.

أما الوحدة الثالثة فتهدف لمعرفة الطالب بمفهوم الأسس واللوغاريتمات ولهذا الغرض تطرقنا للقواعد العامة للأسس والقوانين الأساسية للوغاريتمات كما تطرقنا لطرق حل المعادلات التي تحتوي على الأسس أو اللوغاريتمات.

والوحدة الرابعة خصصت لدراسة مفهوم الدوال والتعريف بمجال ومدى الدوال وكيفية تحديديهما كما نبين في هذه الوحدة كيفية رسم منحنى بعض الدوال المشهورة.

أما الوحدة الخامسة والأخيرة فتهدف لمعرفة الطالب المعاني العامة للمتتابعات والمتسلسلات وكيفية حساب الأوساط الحسابية والهندسية للمتتابعات والحد العام لها وقوانين حساب المجموع الجزئي للمتسلسلات المنتهية الحسابية والهندسية. كما تهدف لتعريف الطالب بأساسيات طرق العد ومفهوم التباديل والتوافيق وكيفية استعمالاتها, ومعرفة قانون ثنائي الحد وكيفية استخدامه. ويتوجب على طالب قسم الإدارة أن يلم بهذه المواضيع. وتهدف هذه الوحدة إلى تحقيق هذا الغرض، وقد قسمت إلى فصلين: فصل المتتابعات والمتسلسلات ، وفصل طرق العد.

في الفصل الأول نتطرق إلى معنى المتتابعات المنتهية و الامنتهية وكيفية معرفة الحد العام للمتتابعات, وحساب الأوساط الحسابية والهندسية كما نتطرق إلى مفهوم المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية وكيفية حساب المجموع الجزئي لها.

في الفصل الثاني نذكر القاعدة الأساسية لطرق العد ونتطرق الى مفهوم التباديل و التوافيق والعلاقة بينهما وخصائصهما كما نشرح مجالات استعمالاتها في طرق العد. وأخيرا نتعرض إلى قانون ثنائي الحد وخصائصه وكيفية استعماله.

والله الموفق

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

المجموعات ونظم الأعداد

المجموعات ونظم الأعداد

١

الجدارة:

الإمام بفهوم المجموعات ونظم الأعداد

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- تعريف المجموعات وتحديد خصائصها.
- اجراء العماليات على المجموعات.
- اجراء العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد النسبية.
- ايجاد القيم المطلقة وتحديد الفترات.

الوقت المتوقع للتدريب:

أربع ساعات للفصل الأول و أربع ساعات للفصل الثاني، بحيث يكون الوقت الكلي ثمان ساعات.

الفصل الأول

المجموعات

١. تعريف المجموعة

نعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تميزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه. فمثلا لتكن المجموعات التالية:

a) مجموعة الأعداد $10 , 8 , 6 , 4 , 2$.
b) مجموعة الإثني عشر شهرا في السنة.
c) مجموعة الأعداد الكبيرة.
d) مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة.

في هذا مثال نعتبر $a)$ و $b)$ مجموعتين لأن عناصرها معروفة ومحددة أما بالنسبة للمجموعتين $c)$ و $d)$ فلا نعتبرهما رياضيا مجموعتين لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة، فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلى آخر. فإذا عناصر $c)$ و $d)$ غير معروفة ومحددة وبالتالي لا نعتبرها مجموعتين. عندما ترد كلمة مجموعة في دراستنا اللاحقة نفهم ضمنا أننا نعني مجموعة رياضية.

٢,١. رموز المجموعات وعناصرها

عادة ما نرمز للمجموعات (تسميتها) بحروف لاتينية كبيرة مثل: A , B , X , Y ... الخ بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل: a , b , x , y ...الخ. وعادة ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع $\{\}$ وتوضع فواصل بينها. فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $\pi , 1 , 0 , 2-$ كالتالي: $A=\{-2,0,1,\pi\}$

ولما كان 0 عنصرا من المجموعة A فإننا نرمز لذالك رياضيا بالعبارة $0\in A$ ونقرأها 0 ينتمي إلى A. أما العنصر 5 مثلا فلا ينتمي إلى A ونعبر عن هذا بي $5\notin A$ وتقرأ 5 لا ينتمي إلى A.

٣,١. طرق تعريف المجموعات

هناك ثلاثة طرق لتعريف المجموعة وهي كما يلي:

- طريقة التعريف بعبارة

في هذه الطريقة نكتفي بذكر جملة معينة يمكن عند قرءاتها تحديد عناصر المجموعة فمثلا نقول

A هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

هذه الطريق غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة.

- طريقة السرد أو حصر العناصر:

وفيها نقوم بكتابة جميع عناصر المجموعة. فمثلا A مجموعة الأعداد الزوجية بين ١ و ٩ هي:

$$A = \{2,4,6,8\}$$

طبعا هذه الطريقة غير مناسبة إلا لمجموعات قليلة العناصر فمثلا لا يمكن سرد كل عناصر مجموعة الأعداد الزوجية. أيضا يلاحظ الطالب أن ترتيب العناصر غير مهم في المجموعة فإن المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة: $A = \{4,6,2,\ 8\}$ كما يلاحظ كذلك أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة فمثلا المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة $A = \{2,4,4,6\ ,8,10,2\}$

- طريقة القاعدة المعينة

وفيها يكون تسلسل العناصر له نمطاً ظاهراً بحيث يمكن التعبير عنه بقاعدة معينة. فمثلا المجموعة $A = \{2,4,6,8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية:

$A = \{x : x \in N\ ,\ x$ زوجي $,8 \geq x \geq 2\}$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

وتقرأ A هي المجموعة المكونة من العناصر x حيث x عدد زوجي طبيعي أكبر أو يساوي ٢ وأصغر أويساوي ٨.

٤،١. المجموعة الجزئية

نقول إن B هي مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت محتواة في A أو بمعنى آخر إن جميع عناصر B موجودة في المجموعة A ونرمز لهذا كالتالي: $B \subseteq A$

ويمكن كتابة هذا رياضيا كالتالي:

$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$ ($\forall$: يقرأ مهما يكون)

إذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $B \subset A$. أما إذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$.

مثال ١: لتكن المجموعات التالية: $C = \{3,11,12\}$ $B = \{5,24\}$ $A = \{3,5,11,24\}$

نلاحظ في هذا المثال عند مقارنة B و C مع A أن: $B \subset A$ و $C \not\subset A$

خصائص المجموعة الجزئية

$$a)\phi \subseteq A \subseteq U \quad b)A \subseteq A \quad c)A \subseteq B \text{ و } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad d)A = B \Rightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A$$

٥,١. تساوي مجموعتين

نقول إن المجموعتين A و B متساويتان ونكتب $A = B$ إذا كانت كل منها مجموعة جزئية من الأخرى أي أن:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ و } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

مثال ٢: هل المجموعتين التاليتين متساويتين: $A = \{0,1\} \ \ B = \{x : x \in N,\ x^2 - x = 0\}$

الحل:

عناصر المجموعة A معروفة ومحددة ولكن عناصر المجموعة B غير محصورة فيجب علينا إذا تحديد عناصرها و يتم ذلك بحل المعادلة المعطاة:

$$x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x - 1 = 0 \ ,\ x = 1$$

إذا: $B = \{0,1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$

٦,١. المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية

عند دراسة أي ظاهرة علمية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة. فمثلا يمكن أن نصنف على جميع طلبة الكلية كمجموعة أساسية بينما مجموعات الطلبة قي التخصصات المختلفة هي مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية. عادة ما نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية بالمجموعة الشاملة و نرمز لها بالرمز U. فمثلا تعتبر المجموعة $U = \{-5,2,7,21\}$ هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $A = \{2,21\}$ و $B = \{-5,7,21\}$ لأن المجموعات A و B مجموعات جزئية من U.

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$. فمثلا المجموعة $A = \{x : x \neq x\}$ هي مجموعة خالية لأنه ليس هناك عنصر يحقق الشرط المذكور. مفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد. تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى.

تمارين

تمرين١: أي من الجمل التالية تحدد مجموعة رياضية

a) مجموعة القاعات الكبيرة داخل الكلية.

b) مجموعة المسلمين المجاهدين في غزوة بدر.

c) مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على ٥.

d) مجموعة الأعداد الطبيعية التي هي أكبر من ١ وأصغر من ٢.

e) مجموعة الطلبة الأذكياء في الكلية.

تمرين٢: اذكر عناصر المجموعات التالية

$a) A=\{x : x\in N , 3<x<12\}$ $\qquad b) B=\{x : x\in N , x odd , 3\le x<11\}$

$c) C=\{x : x\in N , 4x-3=1\}$ $\qquad d) D=\{x : x\in N , x+1=0\}$

$e) E=\{x : x=5n-6 , n\in N , 1\le n<5\}$ $\qquad f) F=\{x : x\in N , \sqrt{x^2+1}=2\}$

تمرين٣: عبر عن المجموعات التالية بقاعدة معينة:

$a) A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$ $\qquad b) B=\{0,4,8,12,16........\}$

$c) C=\{....-10,-5,0,5,10.......\}$ $\qquad c) D=\{1,4,9,16,25,36,49\}$

تمرين٤: لتكن المجموعات التالية:

$\phi,\ A=\{1\}, B=\{1,3\}, C=\{1,3,5\}, D=\{1,2,3,4,5\}, E=\{1,3,5,7,9\}, U=\{1,2,....,8,9\}$

أملأ الفراغات التالية بالرمز المناسب:

$a)\phi.....A \qquad b)A.....B \qquad c)B.....C \qquad d)B.....E$

$e)C.....D \qquad f)C.....E \qquad g)D....E \qquad h)D.....U$

تمرين٥: أي من المجموعات التالية متساوية:

$a) A=\{x : x^2-4x+3=0\}$ $\qquad b) B=\{x : x^2-3x+2=0\}$ $\qquad c) C=\{x : x\in N , x<3\}$

$d) D=\{x : x\in N , x odd , x<5\}$ $\quad e) E=\{1,2\}$ $\quad f) F=\{1,2,1\}$ $\quad g) G=\{3,1\}$ $\quad h) H=\{1,1,3\}$

تمرين٦: هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

$a) a=\{a\}$ $b) 5\in\{5\}$ $c) 9\in\{1,3,6,....\}$ $d) \phi\subseteq A$

$e) A\not\subset U$ $f) \phi\in\{\phi\}$ $g) 4\in\{1,2,3,\{4\}\}$ $h) 7\notin\{3,4,2,\{5\}\}$

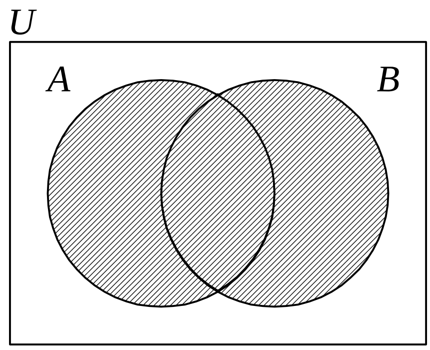
٢. العمليات على المجموعات

١,٢. اتحاد مجموعتين

إذا كانت A و B مجموعتين فإن اتحادهم هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في كل من A أ و B ونرمز لهذه العملية بالرمز $A\cup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ أو } x\in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بأشكال توضيحية تسمى أشكال فن حيث تمثل المجموعة الشاملة U بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون اتحادهم المنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم:



$A\cup B$

مثال٣: لتكن المجموعتان $B=\{2,4,6\}$ $A=\{1,2,3,5\}$ إذا: $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

خصائص الاتحاد

$1) A\cup A=A$ $2) A\cup\phi=A$ $3) A\cup U=U$

$4) A\subseteq(A\cup B)\,,\, B\subseteq(A\cup B)$ $5) A\cup B=B\cup A$ $6) (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

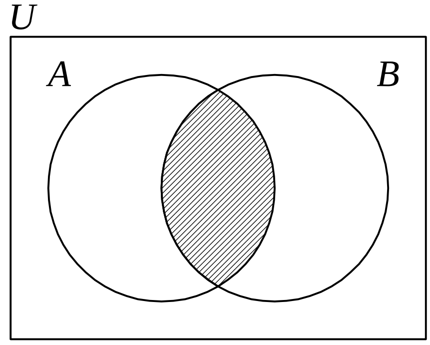
الخاصيتان (4 و (5 هما الإبدالية والتجميعية.

٢,٢. تقاطع مجموعتين

إذا كانت A و B مجموعتين فإن تقاطعهم هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز للتقاطع بالرمز $A\cap B$ ونعرفه كما يلي:

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A \bigcap B$

مثال ٤: لتكن المجموعتين: $B = \{x : x \in N , x \geq 11\}$ $A = \{x : x \in N , x \geq 6\}$ إذا :

$$A \bigcap B = \{x : x \in N , x \geq 11\}$$

خصائص التقاطع

$1) A \bigcap A = A$ $\quad$ $2) A \bigcap \phi = \phi$ $\quad$ $3) A \bigcap U = A$

$4) (A \bigcap B) \subseteq A , (A \bigcap B) \subseteq B$ $\quad$ $5) A \bigcap B = B \bigcap A$ $\quad$ $6) (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$

الخاصيتان (4 و (5 هما الإبدالية والتجميعية.

٣,٢. العلاقة بين الاتحاد والتقاطع (قانون التوزيع)

لتكن A , B , C ثلاثة مجموعات ما فيمكن أن نقول:

$a) \quad A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (أي الاتحاد توزيعي على التقاطع)

وكذلك يمكن أن نقول:

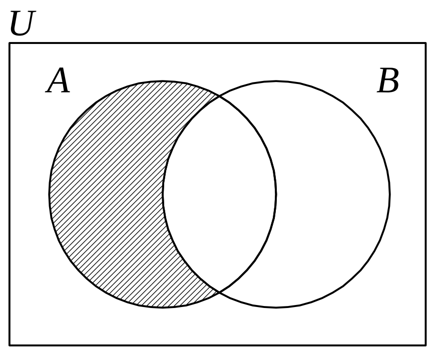
$b) \quad A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ (أي أن التقاطع توزيعي على الإتحاد)

٤,٢. الفرق بين مجموعتين

نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A بأنه مجموعة العناصر التي هي موجودة في A وفي نفس الوقت ليست موجودة في B ويرمز لهذا الفرق بالرمز $A - B$ ونكتب رياضيا :

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A-B$

مثال ٥: لتكن المجموعتين: $B=\{3,6,12,18,20\}$ $A=\{1,5,6,12,20\}$ إذا: $A-B=\{1,5\}$

خصائص الطرح

$1)\ A-A=\phi$ $\quad 2)\ A-\phi=A$ $\quad 3)\ A-U=\phi$

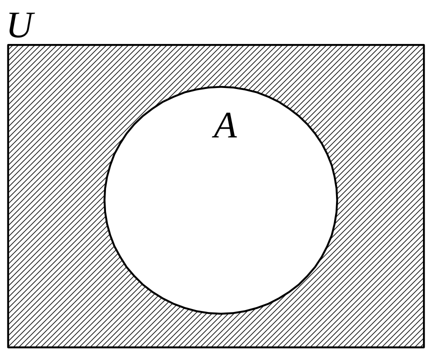
$4)\ A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$ $\quad 5)\ A-B=A \Leftrightarrow A\bigcap B=\phi$ $\quad 6)\ A-B=\phi \Leftrightarrow A\subseteq B$

٥,٢. متممة المجموعة

إذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A ، نعرف متممة A بأنها مجموعة العناصر الموجودة في U وفي نفس الوقت ليست موجودة في A (أي بمعنى أخر $U-A$). ونرمز لمتممة A بالرمز $\overline{A}$ وتكون:

$$\overline{A}=U-A=\{x : x\in U \text{ و } x\notin A\}$$

وتمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$\overline{A}$

مثال ٦: لتكن المجموعتين: $A=\{1,2,3\}$ $U=N=\{1,2,3,4.....\}$ إذا: $\overline{A}=\{4,5,6.....\}$

خصائص المتممة

1) $\overline{A} \cup A = U$ 2) $\overline{A} \cap A = \phi$ 3) $\overline{\phi} = U$

4) $\overline{U} = \phi$ 5) $\overline{\overline{A}} = A$ 6) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq B$

٦,٢. قانون ديمورغان

لتكن A و B مجموعتين ضمن المجموعة الشاملة U عندئذ يتحقق التالي:

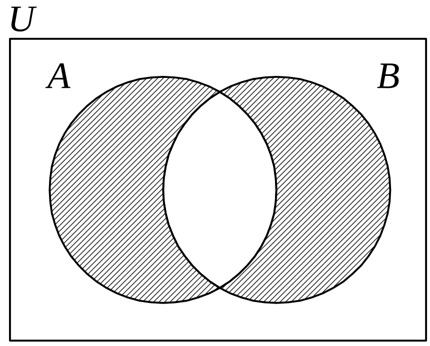
$a)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $b)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

٧,٢. الفرق التناظري بين مجموعتين

نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B بأنه مجموعة العناصر الموجودة إما في A أو B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعنى آخر العناصر الموجودة قي اتحاد المجموعتين و في نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع. ونرمز لهذا الفرق التناظري بالرمز $A \oplus B$

$$A \oplus B = \{x : x \in A \cup B \text{ و } x \notin A \cap B\}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم



$A \oplus B$

مثال ٧: لتكن المجموعتين: $B = \{2,4,a,b\}$ $A = \{2,3,4,5\}$ إذا: $A \oplus B = \{3,5,a,b\}$

خصائص الفرق التناظري

1) $A \oplus A = \phi$ 2) $A \oplus \phi = A$ 3) $A \oplus U = \phi$

4) $A \oplus B = B \oplus A$ 5) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ 6) $A \oplus B = \phi \Leftrightarrow A = B$

تمارين

المجموعات المشار إليها في تمرين ١ إلى ٣ هي المجموعة الشاملة $U=\{1,2,...,9\}$ والمجموعات التالية:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{4,5,6,7\}$ $C=\{5,6,7,8,9\}$

$D=\{1,3,5,7,9\}$ $E=\{2,4,6,8\}$ $F=\{1,5,9\}$

تمرين ١: أوجد ما يلي:

$a) A\cup B$ و $A\cap B$ $b) B\cup D$ و $B\cap D$ $c) A\cup C$ و $A\cap C$

$d) D\cup E$ و $D\cap E$ $e) E\cup F$ و $E\cap F$ $f) D\cup F$ و $D\cap F$

تمرين ٢: أوجد ما يلي :

$a)\overline{A}\,,\overline{B},\overline{C}\,,\overline{D}$ $b) A-B$ $c) B-A$ $d) D-E$

$e) F-D$ $f) A\oplus B$ $g) C\oplus D$ $h) E\oplus F$

تمرين ٣: أوجد ما يلي:

$a) A\cap(B\cup E)$ $b)\overline{A-E}$ $c)\overline{A\cap D}-B$ $d)(B\cap F)\cup(C\cap E)$

تمرين ٤: اختصر ما يلي:

$a) A\cap B\cap\overline{A}$ $b)(\overline{A}\cup\phi)\cup A$ $c)(A\cup B)\cap\overline{B}$ $d)(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$

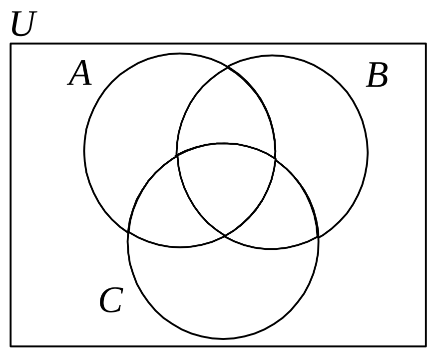
$e)\overline{A\cup B}\cup\overline{A}\cap B$ $f) A\cup B\cup\overline{A}$ $g)(A\cap U)\cup\overline{A}$ $e)[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)]\cap B$

تمرين ٥: لتكن A و B مجموعتين باستخدام أشكال فن ظلل $A\cap\overline{B}$ و $\overline{B-A}$ في كل من الحالات التالية:

$a) A\cap B\neq\phi$ $b) A\cap B=\phi$ $c) B\subset A$

تمرين ٦: الرسم التالي يبين ثلاثة مجموعات A,B,C. ظلل التالي:

$a) A-(B\cup C)$ $b)\overline{A}\cap(B\cup C)$ $c)\overline{A}\cap(C-B)$



تمرين ٧: بين قانون توزيع التقاطع على الاتحاد وقانون ديمورغان باستخدام أشكال فن.

تمرين 8**:** بين أن: $(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \overline{B}) = A$

تمرين 9**:** مع العلم أن $A - B = A \bigcap \overline{B}$ بين أن:

$$(A \bigcup B) - (A \bigcap B) = (A - B) \bigcup (B - A)$$

الفصل الثاني

الأنظمة العددية

١. مجموعات الأعداد

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عده مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها وقد سبق للطالب دراستها في مراحل التعليم العام وفيما يلي تذكير وتأصيل هذه المجموعات.

١,١. مجموعة الأعداد الطبيعية

وهي مجموعة الأعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N :

$$N = \{1,2,3,4...........\}$$

٢,١. مجموعة الأعداد الكلية

وما هي إلا مجموعة الأعداد الطبيعية N مضافا إليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W. وبمعنى آخر $W = N \cup \{0\}$ وتصبح:

$$W = \{0,1,2,3,4,.......\}$$

٣,١. مجموعة الأعداد الصحيحة

بإضافة مجموعة الأعداد السالبة إلى المجموعة W نحصل على مجموعة جديدة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة ونرمز لها بالحرف Z ، إذا:

$$Z = \{.......-2,-1,0,1,2.......\}$$

٤,١. مجموعة الأعداد النسبية

وهي المجموعة التي تكون فيها الأعداد على شكل كسر عددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط أن لا يساوي المقام فيها الصفر ونرمز لها بالحرف Q. وإذا كتبنا هذا التعريف بطريقة القاعدة المعينة تكون:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

نلاحظ هنا أن أي عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يمكن كتابته على شكل كسر بحيث يكون المقام في هذا الكسر العدد ١، فمثلا $-2=\frac{-2}{1}$ وبشكل أعم $m=\frac{m}{1}$.

عند هذه النقطة نلاحظ أن N مجموعة جزئية من W و W مجموعة جزئية من Z و Z مجموعة جزئية من Q، أي باستخدام رمز الاحتواء لدينا: $N \subset W \subset Z \subset Q$

٢. العمليات الحسابية على مجموعات الأعداد

١,٢. العمليات الحسابية على N

فهنا سنعرف فقط عمليتي الجمع والضرب لأن حاصل عملية الطرح والقسمة ليس بالضروري أن يكون عددا طبيعيا. عمليتي الجمع والضرب في المجموعة N تحققان الخواص التالية:

$1)\, a+b=b+a \qquad 2)\, a\cdot b=b\cdot a \qquad 3)\, (a+b)+c=a+(b+c)$

$4)\, (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \qquad 5)\, a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c) \qquad 6)\, a\cdot 1=a \quad \forall a$

١) و ٢) يمثلان خاصية الإبدالية للجمع والضرب، ٣) و ٤) يمثلان خاصية التجميعية، ٥) تمثل خاصية توزيع الضرب على الجمع و ٦) تبين أن العدد ١ محايد بالنسبة لضرب. مع العلم أن عملية الجمع ليست توزيعية على عملية الضرب فمثلا: $4+(3\times 5)\neq(4+3)\times(4+5)$.

٢,٢. العمليات الحسابية على W

نفس العمليتين والخواص المعرفة على N أعلاه مع الملاحظة في هذه المجموعة هناك عنصر محايد بالنسبة لعملية الجمع وهو الصفر : $a+0=a$

٣,٢. العمليات الحسابية على Z

بالإضافة إلى عملية الجمع والضرب فإن عملية الطرح أيضا معرفة على المجموعة Z وذلك لأن حاصل طرح عددين صحيحين يكون دائما عدد صحيح. وعملية الطرح ما هي في الأصل إلا عملية جمع لأن:

$$b\in Z \Rightarrow -b\in Z,\;\; a-b=a+(-b)\in Z$$

مع الملاحظة أن عملية الطرح ليست إبدالية ولا تجميعية وليس لها عنصراً محايداً.

٤,٢. العمليات الحسابية على Q

في هذه المجموعة جميع العمليات الأربعة معرفة، الجمع، الطرح، الضرب والقسمة. وتعرف هذه العمليات حسب القواعد التالية:

$$1)\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{qm+np}{nq} \qquad 2)\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{qm-np}{nq} \qquad 3)\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq} \qquad 4)\frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}$$

في حالة تساوي المقامات تختصر عملية الجمع والطرح والقسمة كالتالي:

$$1)\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n} \qquad 2)\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n} \qquad 3)\frac{m}{n}\div\frac{p}{n}=\frac{m}{p}$$

عمليتي الجمع والضرب تحقق جميع الخواص التي مرت علينا في المجموعة N أما الطرح والقسمة في هذه المجموعة غير إبدالية ولا تجميعية وليس لأي منهما عنصر محايد.

مثال ١: احسب ما يلي: $1)\frac{1}{4}+\frac{2}{9} \qquad 2)\frac{2}{5}-\frac{4}{5} \qquad 3)\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5} \qquad 4)\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}$

الحل:

$$1)\frac{1}{4}+\frac{2}{9}=\frac{1\times 9+2\times 4}{4\times 9}=\frac{9+8}{36}=\frac{17}{36} \qquad 2)\frac{2}{5}-\frac{4}{5}=\frac{2-4}{5}=\frac{-2}{5}$$

$$3)\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{7\times 5}=\frac{6}{35} \qquad 4)\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3\times 7}{5\times 4}=\frac{21}{20}$$

١,٤,٢. خواص الأعداد النسبية

- $$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow mq=np$$

يتساوى عددان نسبيان إذا كان حاصل ضرب البسط الأول في المقام الثاني يساوي حاصل ضرب المقام الأول في البسط الثاني فمثلا $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ لأن $5\times 12=6\times 10=60$

- $$\frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}=\frac{\frac{p}{n}}{\frac{q}{n}}$$

ضرب أو قسمة الكسر بنفس العدد (غير الصفر) لا يؤثر في قيمة الكسر. فمثلا $\frac{\frac{6}{3}}{\frac{15}{3}}=\frac{6\times 2}{15\times 2}=\frac{6}{15}$

- يمكن اختصار الكسر $\frac{p}{q}$ إلى أبسط صورة $\frac{p'}{q'}$ (أي كسراً غير قابل للاختصار) حيث لا يوجد قواسم مشتركة بين q' و p' سوى الواحد. فمثلا أبسط صورة للكسر $\frac{9}{12}$ هي $\frac{3}{4}$.

٢,٤,٢. الكسور المركبة

الكسر المركب هو الكسر المكون من عدد صحيح وكسر على شكل $a\frac{b}{c}$. فمثلا $4\frac{2}{5}$ هو كسر مركب. يمكن تحويل الكسر المركب إلى كسر بجمع العدد الصحيح فيه مع الكسر كما هو مبين في المثال التالي

مثال ٢: حول الكسر المركب التالي إلى كسر: $6\frac{2}{3}$

الحل:

$$6\frac{2}{3}=6+\frac{2}{3}=\frac{6}{1}+\frac{2}{3}=\frac{6\times 3+2\times 1}{3}=\frac{18+2}{3}=\frac{20}{3}$$

٣,٤,٢. مقارنة كسرين

ليكن $\frac{m}{n},\frac{p}{q}\in Q$ حيث المقامات أعداد موجبة، نعرف علاقة الترتيب أصغر من (<) بين هذين الكسرين بالقاعدة التالية: $\frac{p}{q}<\frac{m}{n}\Leftrightarrow pn<qm$

أي أن $\frac{p}{q}$ أصغر من $\frac{m}{n}$ إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب البسط الأول في المقام الثاني أصغر من حاصل ضرب المقام الأول في البسط الثاني، فمثلا: $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$ لأن $2\times 7<5\times 3$ ، كما أن $\frac{-3}{4}<\frac{-5}{9}$ لأن $-3\times 9<4\times(-5)$

٤،٤،٢. الأعداد العشرية

نسمي الكسر الذي قواسم مقامه فقط العدد 2 و 5 بالكسر العشري فمثلا $\frac{3}{4},\frac{7}{5}$ كسور عشرية. ولتحويل مثلا الكسر $\frac{123}{10000}$ إلى عدد عشري نكتب البسط وهو ١٢٣ ثم نتحرك من يمين العدد 3 إلى اليسار ثلاث خانات ويتبقى خانة في أصفار المقام نضفه على يسار العدد ومن ثم الفاصلة لنحصل على أن $\frac{123}{10000}=0.0123$ مع ملاحظة أن العدد العشري لا يتأثر بإضافة أصفار إلى يمينه فمثلا $0.7=0.70=0.700$ ولكن الأمر يختلف تماما عند إضافة أصفار إلى اليسار فمثلا $\frac{5}{10}=0.5$ يختلف كليا عن $\frac{5}{100}=0.05$ ومن هذا الشرح نستنتج خاصية الأعداد العشرية المنتهية وغير المنتهية.

a) الأعداد العشرية المنتهية وغير المنتهية

يمكن تمثيل الكسر العشري كعدد عشري ذي عدد منتهٍ من الخانات أما الكسور الأخرى لا يمكن تمثيلها على هذه الصورة. فمثلا $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=\frac{3125}{10000}=0.3125$ بينما ....$\frac{1}{3}=0.333$ أي أن $\frac{1}{3}$ لا يمكن تمثيله على هيئة عدد عشري منتهٍ لأن مقامه ليس من قوى 2 أو 5. ولتوضيح ذلك نكتب الكسر على الشكل التالي: $\frac{1}{3}=0.\overline{3}$ وهذا يعني أن الخانة 3 تتكرر عدداً لا نهائياً من المرات على يمين الفاصلة. مثال آخر على ذلك: $\frac{1}{11}=0.090909.......=0.\overline{09}$. عادة ما نسمي مثل هذه الأعداد أعداد عشرية دورية.

- أي كسر عشري يمثل بعدد عشري منته (أي عدد الخانات منته)
- أي كسر غير عشري يمثل بعدد عشري غير منته (أي عدد الخانات لا نهائي) ولكنه دوري أي يحوي عدد من الخانات التي تتعاقب بشكل غير نهائي.

b) تحويل العدد العشري إلى عدد كسري

إن أي عدد عشري منته يمكن تحويله إلى عدد كسري وذلك بجعل البسط نفس العدد العشري بعد حذف الفاصلة أما المقام فهو 10 مرفوعة لأس يساوي عدد الخانات بعد الفاصلة فمثلا:
$\frac{523014}{10^5}=5.23014$ وأما إذا كان الكسر العشري غير منته ودوري فالتحويل يكون كالتالي:

مثال ٣: اكتب الأعداد العشرية التالية على شكل عدد كسري: $1)\ 0.\overline{7}$ $\quad 2)\ 4.\overline{32}$ $\quad 3)\ 2.\overline{231}$

الحل:

$$1)\ x = 0.\overline{7} = 0.7777.... \Rightarrow 10x = 7.7777... \Rightarrow 10x - x = 7.7777... - 0.7777...$$

$$\Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

$$2)\ x = 4.\overline{32} = 4.323232... \Rightarrow 100x = 432.3232... \Rightarrow 100x - x = 432.3232.... - 4.3232...$$

$$\Rightarrow 99x = 428 \Rightarrow x = \frac{428}{99}$$

$$3)\ x = 2.\overline{231} = 2.231231.... \Rightarrow 1000x = 2231.2312... \Rightarrow 1000x - x = 2229$$

$$\Rightarrow 999x = 2229 \Rightarrow x = \frac{2229}{999}$$

٥,٤,٢. العمليات الحسابية على الأعداد العشرية

a) جمع وطرح عددين عشريين

أولا نوحد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات لأن ذلك لا يؤثر في قيمة العدد العشري ثم نجمع الخانات المتناظرة كما في جمع الأعداد الصحيحة مع الاحتفاظ بموضع الفاصلة فمثلا:

$$1)\ 11.2541 + 3.97 = 11.2541 + 3.9700 = 15.2241$$

$$2)\ 16.23 - 8.567 = 16.230 - 8.567 = 7.663$$

b) ضرب عددين عشريين

نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة وبعد ذلك نضع الفاصلة بحيث يكون عدد الخانات العشرية في الناتج يساوي مجموع الخانات العشرية للعددين المضروبين فمثلا للقيام بالعملية 3.52×4.6 نجري أولا العملية $46 \times 352 = 16212$ وحيث أن مجموع الخانات العشرية في المضروبين هو $2 + 1 = 3$ نحدد الفاصلة في الناتج بعد ثلاثة خانات إبتداءا من يمين العدد أي يكون الناتج

$$4.6 \times 3.52 = 16.212$$

c) قسمة عددين عشريين

في البداية نساوي عدد الخانات العشرية كما رأينا في عملية الجمع والطرح ثم نجري القسمة كما هو مألوف بين عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه، عند هذه المرحلة نضيف إلى يمين

المقسوم عليه صفرا مع وضع فاصلة في الناتج ونواصل القسمة مع إضافة صفراً إلى القاسم كلما قل عن المقسوم عليه كما في المثال التالي:

مثال ٤: أجر عملية القسمة التالية: $15.48 \div 7.2$

الحل:

2.15	
1548	720
1440	
108	
720	
3600	
3600	
0000	

وبذلك فإن الناتج (أو خارج القسمة) هو: ٢.15

كما يمكن التأكد من صحة القسمة بضرب الناتج في المقسوم عليه لينتج القاسم.

٦,٤,٢. تقريب الأعداد العشرية

نحتاج في الحسابات العلمية لتقريب وتقليل الخانات العشرية وخصوصا في الأعداد العشرية غير المنتهية. والقاعدة المتبعة في التقريب لعدد محدود من الخانات العشرية هي كالتالي:

- عند حذف الخانات بدأ من خانة معينة ننظر لأول خانة محذوفة من اليسار فإذا كان عددها 5 أو ما أكثر في هذه الحالة نضيف للخانة ما قبل المحذوفة العدد 1.
- إذا كانت أول خانة محذوفة أقل من 5 فنحذف الخانات الزائدة بدون أي إضافات على الخانات المتبقية.

مثال ٥: قرب الأعداد العشرية التالية إلى ثلاثة خانات فقط: 1)5.145512 2)3.21945

الحل:

١) حيث أن أول خانة محذوفة هي 5 يضاف عند التقريب واحد إلى الخانة الأولى غير المحذوفة أي تصبح 6 بدلا من 5 ويصبح العدد بعد التقريب $5.146 \approx 5.145512$

٢) أول خانة محذوفة هي 4 وبالتالي العدد بعد التقريب هو $3.219 = 3.21945$

تمارين

تمرين ١: أجر العمليات الحسابية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة:

$$1)\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5} \quad 2)\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4} \quad 3)3\frac{5}{8}+5\frac{1}{32} \quad 4)4\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}-5\frac{3}{4} \quad 5)8-2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}$$

$$6)6\times\frac{2}{3} \quad 7)2\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}\times1\frac{1}{4} \quad 8)\frac{4}{5}\div2\frac{7}{15} \quad 9)2\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}\div3\frac{3}{4} \quad 10)\left(\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-2}{3}\div\frac{4}{9}\right)$$

تمرين ٢: احسب ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة:

$$1)\frac{\left(9+\frac{1}{2}\right)(5-7)}{2\times\frac{5}{8}} \quad 2)\frac{(5-8)\times\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{5}} \quad 3)-2\times(-8-3)\times\left(\frac{1}{4}\div5\right) \quad 4)\frac{1\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}}{5\frac{3}{7}-2\frac{4}{5}}$$

تمرين ٣: رتب الكسور في الفقرة a) تصاعديا من الأصغر إلى الأكبر وفي الفقرة b) تنازليا من أكبر إلى أصغر:

$$1)\ \frac{1}{4},\frac{-1}{2},\frac{3}{-4},\frac{2}{5},\frac{5}{11} \qquad 2)\frac{5}{9},\frac{-2}{3},\frac{7}{13},\frac{8}{15},\frac{4}{-7}$$

تمرين ٤: حول كلا مما يلي إلى أعداد عشرية:

$$1)\frac{3}{8} \quad 2)\frac{7}{16} \quad 3)\frac{15}{25} \quad 4)\frac{22}{125}$$

تمرين ٥: حول كلا مما يلي إلى أعداد عشرية دورية غير منتهية:

$$1)\frac{5}{11} \quad 2)\frac{4}{21} \quad 3)\frac{8}{35}$$

تمرين ٦: حول كلا مما يلي إلى أعداد كسرية:

$$1)0.0975 \quad 2)1.\overline{13} \quad 3)4.25\overline{31}$$

تمرين ٧: أجر العمليات التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة:

$$1)97+364.23+0.759 \quad 2)7.58+94.6+4.989 \quad 3)0.917-1.165 \quad 4)362.78-457.06$$

$$5)4.5\times9.72 \quad 2)57.8\times0.023 \quad 3)18.598\div5.47 \quad 4)6.75\div106$$

تمرين ٨: قرب الأعداد التالية:

$$1)3.401902 \quad 2)11.989601 \quad 3)1.012903 \quad 4)19.569492$$

a) في خانتين

b) في ثلاثة خانات

٣. الأعداد الحقيقية

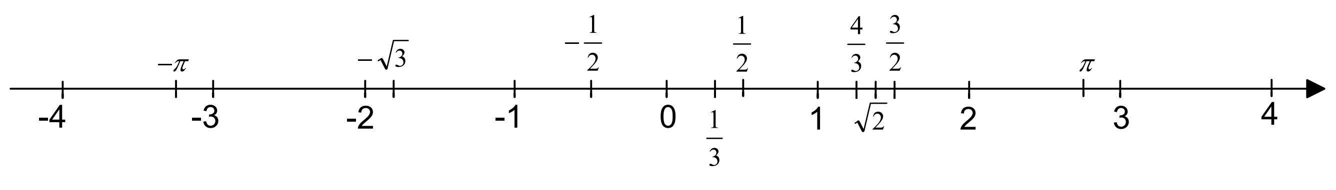
مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نرمز لها بالرمز R تحتوي على مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية والأعداد الصحيحة والأعداد النسبية (التي تكلمنا عليها في بداية هذا الباب) بالإضافة إلى الأعداد غير النسبية. الأعداد غير النسبية هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الطريقة التي عرفنا بها المجموعة Q سابقا.

١,٣. مثال على العدد الغير نسبي $\sqrt{2}$

أولا لنفرض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي فكما ذكرنا سابقا يمكن كتابته على شكل كسر عددين a و b ليس لهما قواسم مشتركة: $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ وهذا يعني: $\sqrt{2} \cdot b = a$ وبتربيع الطرفين: $2b^2 = a^2 (1)$ هنا نلاحظ أن a^2 عدد زوجي لأنه مضروب لعدد 2. ونحن نعلم أيضا أن تربيع عدد زوجي هو عدد زوجي وتربيع عدد فردي هو عدد فردي، إذا نستنتج أن a عدد زوجي ومنه يمكن كتابته على شكل $a = 2c$ حيث c عدد طبيعي. بتعويض a بالقيمة $2c$ في المعادلة (1) يصبح لدينا: $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$. وبنفس الطريقة نستنتج أن b^2 وبالتالي b عدد زوجي. إذا الاقتراض الأول أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي أوصلنا إلى استنتاج أن a و b أعداد زوجية وهذا يعني أن العددين لهما قاسم مشترك وهو 2 و هذا ما يتناقض مع افتراضنا في البداية (أن a و b ليس لهما قواسم مشتركة)، إذا $\sqrt{2}$ ليس عددا نسبيا كما افرضنا.

٢,٣. خط الأعداد الحقيقية

تحدد الأعداد النسبية على خط الأعداد بتقسيم الفترة. فمثلا $\dfrac{8}{3} = 2\dfrac{2}{3}$ هو على بعد ثلثي $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ من العدد 2 إلى العدد 3. الأعداد غير النسبية موضوعة بين عددين نسبيين مناسبين تقريبيين، فمثلا $\sqrt{2} \approx 1.41421$ يظهر بين 1.4142 و 1.4143 كذلك بعض الأعداد النسبية وغير النسبية مبينة على الخط كما هو موضح على الرسم التالي:



٣,٣. العمليات الحسابية على R

جميع العمليات الحسابية المعرفة على Q هي أيضا معرفة على R ولها نفس الخواص كما في المجموعة Q إلا أن R أيضا معرف عليها عملية ليست معرفة على Q وهي عملية الجذر. $\sqrt{a}$ حيث a عدد حقيقي موجب فلابد أن $\sqrt{a} \in R$ بينما وجدنا أعلاه أن $2 \in Q$ ولكن $\sqrt{2} \notin Q$. وفي الواقع هناك كثير من العمليات معرفة على R وليست معرفة على Q ولكن ليس المجال مناسب لذكرها هنا.

٤. الفترات

بعض المجموعات للأعداد الحقيقية مهمة جدا في التطبيقات.

١,٤. الفترات المنتهية

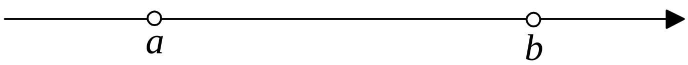
في هذه الحالة يكون طول الفترة منتهياً وينقسم إلى أربع حالات كالتالي:

١) الفترة المفتوحة من a إلى b والتي يرمز إليها بي (a,b) هي مجموعة الأعداد الحقيقية بين a و b دون قيمتي a و b وتكون:

$$(a\ ,\ b) = \{x : a < x < b\}$$

مع الملاحظة أن $a \notin (a\ ,\ b)$ و $b \notin (a\ ,\ b)$ ونسمي a و b نقاط النهاية للفترة كما هو موضح في الرسم

○ تدل على أن القيمة ليست ضمن الفترة

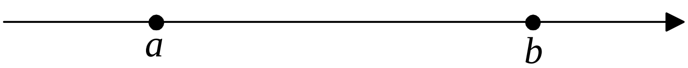


٢) الفترة المغلقة من a إلى b والتي يرمز إليها بي $[a,b]$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية بين a و b إضافة إلى قيمتي a و b وتكون:

$$[a\ ,\ b] = \{x : a \le x \le b\}$$

مع الملاحظة أن $a \in [a\ ,\ b]$ و $b \in [a\ ,\ b]$ ونسمي a و b نقاط النهاية للفترة كما هو موضح في الرسم

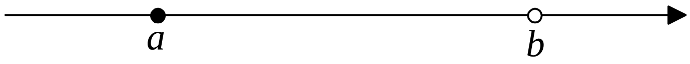
● تدل على أن القيمة ضمن الفترة



٣) الفترة نصف المفتوحة من اليمين والتي يرمز لها $[a\ ,\ b)$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية بين a و b وفي هذه الحالة تكون قيمة a ضمن الفترة أما قيمة b خارج الفترة وتكون:

$$[a\ ,b)=\{x:a\le x<b\}$$

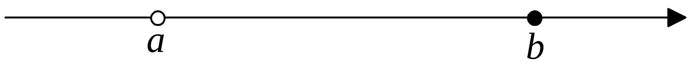
مع الملاحظة أن $a\in[a\ ,b)$ و $b\notin[a\ ,b)$ ونسمي a و b نقاط النهاية للفترة كما هو موضح في الرسم



٤) الفترة نصف المفتوحة من اليسار والتي نرمز لها $(a\ ,b]$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية بين a و b وفي هذه الحالة تكون قيمة a ضمن الفترة أما قيمة b خارج الفترة وتكون:

$$(a\ ,b]=\{x:a<x\le b\}$$

مع الملاحظة أن $a\notin(a\ ,b]$ و $b\in(a\ ,b]$ ونسمي a و b نقاط النهاية للفترة كما هو موضح في الرسم



٢,٤. الفترات غير المنتهية

يمكن أن تكون الفترة غير منتهية في طولها وهنا كذلك تنقسم إلى أربع حالات

١) رمز مجموعة الأعداد الواقعة على يسار عدد معين a هو $(-\infty\ ,a)$ وتعني المجموعة:

$$(-\infty\ ,a)=\{x:x<a\}$$

٢) رمز مجموعة الأعداد الواقعة على يمين عدد معين a هو $(a\ ,\infty)$ وتعني المجموعة:

$$(a\ ,\infty)=\{x:x>a\}$$

٣) رمز مجموعة الأعداد الواقعة على يسار عدد معين a ومغلقة من جهته هو $(-\infty,a]$ وتعني المجموعة:

$$(-\infty\ ,a]=\{x:x\le a\}$$

٤) رمز لمجموعة الأعداد الواقعة على يمين عدد معين a ومغلقة من جهته بالرمز $[a\ ,\infty)$ وتعني المجموعة:

$$[a\ ,\infty)=\{x:x\ge a\}$$

٥) رموز مجموعة الأعداد الحقيقية هي $R=(-\infty\ ,\infty)$

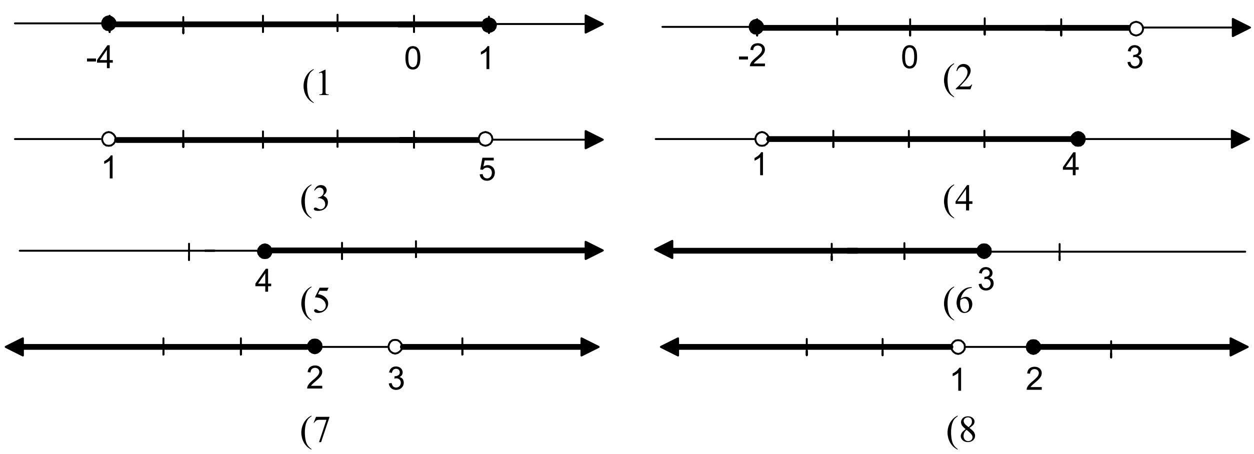
مع الملاحظ أن الرموز $-\infty$ و ∞ فقط تدل على ناقص وموجب ما لا نهاية ولا تعتبر أعدادا حقيقية يمكن تطبيق عليها قواعد الجبر المعتادة.

مثال ٦ : مثل الفترات التالية على خط الأعداد :

$1)[-4\ ,1]$ $\quad 2)[-2\ ,3)$ $\quad 3)(1\ ,5)$ $\quad 4)(1\ ,4]$

$5)[4\ ,\infty)$ $\quad 6)(-\infty\ ,3]$ $\quad 7)(-\infty\ ,2]\cup(3\ ,\infty)$ $\quad 8)(-\infty\ ,1)\cup[2\ ,\infty)$

الحل:



٥. القيمة المطلقة

القيمة المطلقة لعدد حقيقي a والتي يرمز لها ب $|a|$ هي المسافة بين a والنقطة 0 على خط الأعداد. فمثلا $|2|=2$ و $|-2|=2$ وفي العموم إذا كان $a\geq 0$ فإذا $|a|=a$ ولكن إذا كان $a<0$ فإذا $|a|=-a$ لأن $-a$ موجب إذا كان $a<0$. وبهذا نصل إلى التعريف التالي للقيمة المطلقة:

$$|a|=\begin{cases} a & if\ a\geq 0 \\ -a & if\ a<0 \end{cases}$$

ومن هذا التعريف لأي عداد الحقيقي a أو b يمكن استنتاج النظريات التالية:

$1)|a|\geq 0$ $\quad 2)|ab|=|a||b|$ $\quad 3)\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $\quad 4)|a+b|\leq|a|+|b|$ $\quad 5)|a-b|=|b-a|$

مثال ٧ : أعد كتابة ما يلي بدون القيمة المطلقة

$1)|4|$ $\quad 2)|-8|$ $\quad 3)|3|-|-7|$ $\quad 4)-|-3|-|8|$

$5)|4||-8|$ $\quad 6)|1-\pi|$ $\quad 7)|x^2+1|$ $\quad 8)|x+1|+|x-3|\ ,\ x>4$

الحل:

١) لأن $4>0$ إذا $|4|=4$

٢) لأن $-8<0$ إذا $|-8|=-(-8)=8$

٣) $|3|-|-7|=3-[-(-7)]=3-(7)=3-7=-4$

٤) $-|-3|-|8|=-[-(-3)]-(8)=-(3)-(8)=-3-8=-11$

٥) $|4||-8|=(4)[-(-8)]=(4)(8)=32$

٦) لأن $\pi>1$ إذا $1-\pi<0$ وبالتالي $|1-\pi|=-(1-\pi)=-1+\pi=\pi-1$

٧) لأن $x^2\geq 0$ إذا $x^2+1>0$ وبالتالي $|x^2+1|=x^2+1$

٨) لأن $x>4$ (معطاة) إذا $x+1>0$ و $x-3>0$ فبالتالي

$$|x+1|+|x-3|=(x+1)+(x-3)=x+1+x-3=2x-2=2(x-1)$$

تمارين

تمرين ١: مثل الفترات التالية على خط الأعداد

$1)(1\,,5)\quad 2)(1\,,4]\quad 3)[-2\,,1)\quad 4)[1\,,4]\quad 5)(-\infty\,,0]\quad 6)(\pi\,,\infty)$

$7)(-\infty\,,3)\cup(3\,,\infty)\quad 8)(-\infty\,,1)\cup[4\,,\infty)\quad 9)[-2\,,1)\cup[2\,,4]\cup(5\,,\infty)$

تمرين ٢: أعد كتابة ما يلي بدون القيمة المطلقة

$1)|6|\quad 2)|-6|\quad 3)|2\times(-3)|\quad 4)|2|\cdot|-3|$

$5)\left|\frac{-2}{3}\right|\quad 6)\frac{|-2|}{|3|}\quad 7)|1-\sqrt{2}|\quad 8)|7-9|$

تمرين ٣: أوجد قيمة $|x+3|$ لما:

$1)\,x=7\quad 2)\,x=-8\quad 3)\,x=0\quad x=\frac{-2}{3}$

تمرين ٤: أعد كتابة ما يلي بدون القيمة المطلقة

$1)|y^2+1|\quad 2)|x+6|+|x-2|\,,\,0<x<1$

$3)|x-4|+|x+5|\,,\,2<x<3\quad 4)\left|\frac{x+7}{|x|+|x-1|}\right|,\,0<x<1$

المملكـــة العربيـــة الســـعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

٢

الجدارة:

الإلمام بفهم كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها.
- تحليل كثيرات الحدود بطرق مختلفة (العامل المشترك، طريقة المميز و إكمال المربع).
- حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية ذات مجهول واحد.
- حل المتراجحات الخطية وتحديد الفترات التي تحقق مجموعة الحلول.

الوقت المتوقع للتدريب: خمسة ساعات للفصل الأول و خمسة ساعات للفصل الثاني، بحيث يكون الوقت الكلي عشر ساعات.

الفصل الأول

كثيرات الحدود

١. تعريف كثيرات الحدود

يكون الحد الجبري إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابت في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه. فمثلا معامل الحد الجبري $-3x^2y$ هو -3 ودرجته تساوي 3.
كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منتهي من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها. الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس) تسمى الحدود المتشابهة، فمثلا $12x^2$ و $-9x^2$ حدان متشابهان ولكن الحدود $-2x^3y$ و $7x^3y^2$ ليست متشابهة. تتم عملية الاختصار بجمع الحدود المتشابهة فمثلا يختصر $4x^2+3x-2x$ إلى $4x^2+x$. درجة الحد الثابت دائما تساوي الصفر $(2=2x^0)$.

الشكل العام لكثيرات الحدود هو كالتالي:
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_2x^2+a_1x+a_0$ حيث $a_n\neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب. المعامل a_n هو المعامل الرئيسي و a_0 هو الحد الثابت.

فمثلا الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لثلاثة كثيرات حدود:

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعاملات	المعامل الرئيسي
$9x^2-x+5$	$9x^2, -x, 5$	2	$9, -1, 5$	9
$11-2x$	$-2x, 11$	1	$-2, 11$	-2
x^3+5x-3	$x^3, 5x, -3$	3	$1, 5, -3$	1

٢. العمليات الحسابية على كثيرات الحدود

١,٢. جمع وطرح كثيرات الحدود

مثال ١: اختصر ما يلي:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3) \quad 2)\ (x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)$$

الحل:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)=(3x^2+4x^2)+(6x-5x)+((-4)+1)=7x^2+x-3$$

$$2)\ (x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)=(x^2-2x^2)+[(-5x)-(+3x)]+(7-(-2))=-x^2-8x+9$$

٢,٢. ضرب كثيرات الحدود

تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني.

مثال ٢: احسب واختصر ما يلي: $(2x-3)(3x^2-x+1)$

الحل:

$$(2x-3)(3x^2-x+1)=(2x)(3x^2)+(2x)(-x)+(2x)(1)+(-3)(3x^2)+(-3)(-x)+(-3)(1)$$

$$=6x^3-2x^2+2x-9x^2+3x-3=6x^3-11x^2+5x-3$$

بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

$$(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)(x-y)=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$(x+y)(x+y)(x+y)=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)(x-y)(x-y)=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

مثال ٣: أوجد حاصل ضرب التالي باستخدام القوانين المشهورة:

الحل:

$1)(7x+10)(7x-10) \qquad 2)(2y^2+11z^2)^2 \qquad 3)(2x-3y)^3$

$1)\ (7x+10)(7x-10)=(7x)^2-(10)^2=49x^2-100$

$2)\ (2y^2+11z^2)^2=(2y^2)^2+2(2y^2)(11z^2)+(11z^2)^2=4y^4+44y^2z^2+121z^4$

$3)\ (2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

٣,٢. حساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير

مثال ٤: احسب قيمة $2x^3-6x^2+7$ عندما: $1)\,x=-4 \qquad 2)\,x=\sqrt{2}$

الحل:

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بالقيم المعطاة كالتالي:

$a)\,2x^3-6x^2+7=2(-4)^3-6(-4)^2+7=2(-64)-6(16)+7=-128-96+7=-217$

$b)\,2x^3-6x^2+7=2(\sqrt{2})^3-6(\sqrt{2})^2+7=2(2\sqrt{2})-6(2)+7=4\sqrt{2}-12+7=4\sqrt{2}-5$

٤,٢. قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المطولة المستعملة في تقسيم الأعداد الصحيحة.

فمثلا لتقسيم $x^2+9x-16$ على $x-3$ نتبع الطريقة التالية:

	$x+12$
$x-3$	$x^2+9x-16$
	x^2-3x
	$12x-16$
	$12x-36$
	20

إذا في هذا المثال يكون خارج قسمة $x^2+9x-16$ على $x-3$ هو $x+12$ وباقي القسمة هو 20

تمارين

تمرين ١: اذكر الحدود ، المعاملات، الدرجة والمعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود التالية:

1) x^2+2x-7 2) $\sqrt{2}$ 3) $4x^2y^2-5x^3y^2+17xy^3$

4) $2x^4+3x^3+4x^2+5$ 5) x^3-1 6) $-9x^5y+10xy^4-11x^2y^2$

تمرين ٢: احسب واختصر ما يلي:

1) $(3x^2+4x+5)+(2x^2+7x-2)$ 5) $(5x-7)(3x^2-8x-5)$

2) $(4w^2-2w+7)+(5w^3+8w^2-1)$ 6) $(3x^2-2x+5)(2x^2-5x+2)$

3) $(7s^2-4s+11)-(-2s^2+11s-9)$ 7) $(3c-2)(4c+1)(5c-2)$

4) $(u^3-3u^2-4u+8)-(u^2-2u+4)$ 8) $(4u-5)(2u-1)(3u-4)$

تمرين ٣: استخدم القوانين المشهورة لحساب واختصار ما يلي:

1) $(3x+5)(3x-5)$ 7) $[(x+5)+y][(x+5)-y]$

2) $(4x^2-3y)(4x^2+3y)$ 8) $[(x-2y)+7][(x-2y)-7]$

3) $(3x^2-y)^2$ 9) $(x-1)^3$

4) $(4w+z)^2$ 10) $(2x+y)^3$

5) $[(x-2)+y]^2$ 11) $[(x-1)+2y]^3$

6) $[(x+3)-y]^2$ 12) $[4-(1-2y)]^3$

تمرين ٤: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند النقاط المعطاة:

$1)\, x^2 + 7x - 1\,;\, x = 3$

$2)\, -x^2 - 5x + 4\,;\, x = -5$

$3)\, 5x^3 - x^2 + 5x - 3\,;\, x = -1$

$4)\, 1 - x^3 - x^5\,;\, x = 2$

تمرين ٥: استعمل طريقة القسمة المطولة لقسمة كثيرة الحدود الأولى على الثانية:

$1)\, 5x^3 + 6x - 17x + 20,\ x + 3$

$2)\, 6x^4 + 3x^2 - 11x^2 - 3x + 9,\ 2x - 3$

$3)\, 2x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x + 45,\ 2x^2 - x - 5$

$4)\, 24x^5 + 20x^3 - 16x^2 - 15,\ 6x^2 + 5$

٣. تحليل كثيرات الحدود

عملية كتابة كثيرة حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليلاً، عملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات. سنتطرق في هذا الباب فقط إلى كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة.

٣,١. طريقة العامل المشترك الأكبر (أ.ع.م)

في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكنا كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 5: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر:

$1)\, 10x^3 + 6x \qquad 2)\, 12x^2y - 6xy - 30xy^2 \qquad 3)\, (x-4)(2a-b) + (x+4)(2a-b)$

الحل:

١) نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م) بين $10x^3$ و $6x$ هو $2x$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$10x^3 + 6x = 2x(5x^2) + 2x(3) = 2x(5x^2 + 3)$$

٢) في هذه الفقرة نلاحظ أن (أ.ع.م) بين الحدود الثلاثة هو $6xy$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$12x^2y - 6xy - 30xy^2 = 6xy(2x) - 6xy(1) - 6xy(5y) = 6xy(2x - 1 - 5y) = 6xy(2x - 5y - 1)$$

٣) هنا نلاحظ أن (أ.ع.م) هو كثيرة الحدود $2a - b$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)=(2a-b)\left[(x-4)+(x+4)\right]=(2a-b)(x-4+x+4)$$
$$=(2a-b)(2x)=2x(2a-b)$$

هناك حالات يتم فيها التحليل بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 6: حلل كثيرة الحدود التالية: $6y^3-21y^2-4y+14$

الحل:

نقوم أولا بتجميع الحدين الأولين وتجميع الحدين الأخيرين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)$$

ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$

وفي الأخير نلاحظ أن $2y-7$ أصبح عاملاً مشتركاً بين المجموعتين فإذا يصبح التحليل كما يلي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$
$$=(2y-7)(3y^2-2)$$

٣,٢. طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c

الحالة الأولى: $a=1$

في هذه الحالة يجب أن نجد كثيرتي حدود يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b. المثال التالي يوضح هذه الطريقة.

مثال 7 **:** حلل كثيرة الحدود التالية: $x^2+7x-18$

الحل:

في هذه الحالة $b=7$ و $c=-18$ إذا يجب البحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -18 وجمعهما الجبري يساوي 7. فالعددان حسب الشرطين المذكورين هما -2 و 9 لأن $7=9+(-2)$, $-18=9\cdot(-2)$.

وهكذا يصبح التحليل كما يلي:

$x^2+7x-18=(x-2)(x+9)$ ويمكن التأكد من هذا الحل بفك الأقواس.

في حالة عدم استطاعة إيجاد العددين حسب الشرطين المذكورين نحاول التحليل بطرق أخرى سنذكرها في هذا الفصل.

الحالة الثانية: $a \neq 1$

في هذه الحالة نبحث عن أربعة أعداد صحيحة m, n, p, q تستوفي الشروط الثلاثة التالية:

$$1) mn = a \ , \ 2) pq = c \ , \ 3) mq + np = b$$

وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع الملاحظة أن إشارة p و q تكون نفس إشارة b إذا كان $c > 0$ ومختلفتان إذا كان $c < 0$. يتم اختيار m و n على أساس الشروط (1 و (2 ثم نستخدم الشرط (3 للتأكد من صحة الأعداد m و n.

مثال 8: حلل كثيرة الحدود التالية: $6x^2 + 11x + 3$

الحل:

يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m, n, p, q حيث: $mn = 6, pq = 4, mq + np = -11$

مع العلم أن إشارة p و q موجبة لأن $c > 0$ و $b > 0$ وبطريقة التجربة والخطأ نجد في الأخير أن: $m = 2, n = 3, p = 3, q = 1$ إذا يكون التحليل كما يلي:

$$6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$$

ملاحظة: حتى تكون $ax^2 + bx + c$ قابلة للتحليل بمعاملات صحيحة يجب أن تكون القيمة $b^2 - 4ac$ مربعا كاملا. فمثلا $6x^2 - 5x - 4$ قابلة للتحليل لأن $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6)(-4) = 121 = 11^2$.
إذا كان $p = q$ و $m = n$ فنقول أن $ax^2 + bx + c$ هو مربع كامل وتحليله يساوي $(mn + p)^2$

٣,٣. طريقة تحليل فرق مربعين

في هذه الطريقة نستخدم إحدى القوانين المشهورة التي ذكرناها في بداية هذا الباب وهي:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

مثال 9: حلل $49x^2 - 144$

الحل:

يمكن كتابة $49x^2 - 144$ على شكل $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون المذكور أعلاه ويصبح التحليل كالتالي: $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2 = (7x + 12)(7x - 12)$

٤,٣. طريقة تحليل فرق وجمع مكعبين

هنا كذلك نستخدم قانونين لم نذكرها من قبل وهما قانون فرق وجمع مكعبين:

$a)\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ $\qquad b)\ x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

مثال 10: حلل كل من: $1)\ 8a^3 + b^3 \quad 2)\ a^3 - 64$

الحل:

١) يمكن كتابة $8a^3 + b^3$ على شكل $8a^3 + b^3 = (2a)^3 - (b)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون $b)$ ويصبح التحليل كما يلي:

$$8a^3 + b^3 = (2a)^3 + (b)^3 = (2a+b)[(2a)^2 - (2a)(b) + (b)^2]$$
$$=(2a+b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

٢) يمكن كتابة $a^3 - 64$ على شكل $a^3 - 64 = (a)^3 - (4)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون $b)$ ويصبح التحليل كالتالي:

$$a^3 - 64 = (a)^3 - (4)^3 = (a-4)[(a)^2 + (a)(4) + (4)^2] = (a-4)(a^2 + 4a + 16)$$

٥,٣. طريقة التحليل بتجميع الحدود

تستوجب هذه الطريقة شيئا من الخبرة لمعرفة الحدود التي يجب تجميعها.

مثال 11**:** حلل كل مما يلي بطريقة التجميع: $1)\ 2m^2 + 6mn - 15m - 5n \quad 2)\ p^2 + p - q - q^2$

الحل:

يتم التجميع والتحليل كما يلي:

$$1)\ 2m^2 + 6mn - 15n - 5m = (2m^2 + 6mn) + (-15n - 5m)$$
$$= 2m(m+3n) - 5(3n+m) = (m+3n)(2m-5)$$

$$2)\ p^2 + p - q - q^2 = p^2 - q^2 + p - q = (p^2 - q^2) + (p-q)$$
$$= (p+q)(p-q) + (p-q) = (p-q)(p+q+1)$$

تمارين

حلل التالي باستخدام الطريق المناسبة:

1) $-15x^2 - 12x$

2) $6a^3b^2 - 12a^2b + 72ab^3$

3) $(x-4)(m+2n) + n(x-4)$

4) $x(y-3) - 5(3-y)$

5) $3x^3 + x^2 + 6x + 2$

6) $2x^2 - 2xy + x - y$

7) $10z^3 - 15z^2 - 4z + 6$

8) $6m^3 + 4m^2 - 15m - 10$

9) $x^2 + 9x + 20$

10) $b^2 + 12b - 28$

11) $8a^2 - 26a + 15$

12) $6x^2 - 23x + 20$

13) $x^4 + 11x^2 + 18$

14) $9x^4 + 10x^2 + 1$

15) $6x^4 + 23x^2 + 15$

18) $x^2 - 9$

19) $81b^2 - 16c^2$

20) $x^4 - 9$

21) $16y^4 - 196$

22) $1 - 121n^2$

23) $x^2 - (y+z)^2$

24) $x^3 - 8$

25) $p^3 + 64$

26) $64u^3 - 27w^3$

27) $1 + y^{12}$

28) $8 - x^6$

29) $(x-2)^3 - 1$

31) $(a+b)^3 + (a-b)^3$

33) $27 - (x+1)^6$

34) $5xy + 20y - 15x - 60$

35) $4x^2 + 2x - y - y^2$

36) $x^2 + 6x + 9 - y^2$

37) $4x^2 - 9y^2 + 4x + 1$

38) $27x^3 - 6x^2 + 2x - 1$

39) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

40) $a^2 + a + b - b^2$

٤. الكسور الجبرية (العبارات النسبية)

كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيرتي حدود. فمثلا تعتبر $\frac{3x+1}{2x-5}$ و $\frac{x^2-3x+4}{x^2+7x+12}$ كسوراً جبرية. مجال الكسر الجبري هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي صفر لأن القسمة في هذه الحالة تكون غير معرفة، فعلى سبيل المثال مجال $\frac{2x}{x^2-3x}$ هو كل الأعداد الحقيقية دون $x=3$, $x=0$ لأن قيمة المقام عند هذه النقاط تساوي صفر. خصائص الكسور الجبرية هي كالتالي:

$$\frac{P}{Q}=\frac{R}{S} \Leftrightarrow PS=QR \;\;,\;\; \frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}\; R\neq 0 \;\;,\;\; -\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}$$

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q} \;\;,\;\; \frac{P}{Q}-\frac{R}{Q}=\frac{P-R}{Q} \;\;,\;\; \frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \;\;,\;\; \frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{PS}{QR}\; R\neq 0$$

١,٤. اختصار الكسور الجبرية

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام. فإذا عملية الاختصار تتطلب منا الإدراك الجيد بعماليات التحليل التي مرت بنا في هذا الباب.

مثال 12: اختصر ما يلي: $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

الحل:

أولا نقوم بتحليل البسط والمقام بالطرق التي مرت بنا سابقا كالتالي:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3) \;\;,\;\; x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

إذا يختصر الكسر كالتالي: $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+2}\,,\; x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3$

ملاحظة $\frac{x+6}{2}\neq x+3$ وإنما $\frac{x+6}{2}=\frac{x}{2}+\frac{6}{2}=\frac{x}{2}+3$

مثال 13**:** اختصر كل مما يلي: $2)\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}$ $\quad 1)\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$

الحل:

$$1)\;\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}\,,\; x\neq 1\; x\neq 2$$

$$2)\ \frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\div\frac{(x+4)(x+3)}{x(x^2-3x+9)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\cdot\frac{x(x^2-3x+9)}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)x(x^2-3x+9)}{(x+3)(x^2-3x+9)(x+4)(x+3)}=\frac{x}{x+4}\ ,\ x\neq 0\ x\neq -3$$

مثال 14 : احسب واختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}\quad 2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}\quad 3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}$$

الحل:

في مثل هذه المسائل بعد تحليل المقام (إذا كان ذلك ممكنا) يجب أن نبحث عن أصغر مقام مشترك.

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}=\frac{(2mn+m)-(mn+m)}{m+n}=\frac{2mn+m-mn-m}{m+n}=\frac{mn}{m+n}$$

$$2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}=\frac{x(2x-1)+3(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2-x+3x+3}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(2x-1)}$$

$$3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x-1}{(x-5)(x+2)}=\frac{x(x-5)-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-5x)-(2x^2-4x-x+2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}=\frac{x^2-5x-2x^2+4x+x-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{-x^2-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}=-\frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

هناك حالات يكون فيها بسط ومقام الكسر الجبري عبارة عن كسور جبرية. لاختصار مثل هذا الكسر يجب أولا اختصار البسط والمقام ثم نواصل عملية الاختصار بنفس الطريقة المذكورة سابقا.

مثال 15 : اختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}} \qquad 2)\ \frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}$$

الحل:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+1(x-2)}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{3x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{3x-2}{x(x-2)}\cdot\frac{x-5}{3x-2}$$

$$=\frac{(3x-2)(x-5)}{x(x-2)(3x-2)}=\frac{x-5}{x(x-2)}$$

$$2)\ \frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}=\frac{x-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-y}=\frac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{1-xy}{x}}=\frac{xy-1}{y}\cdot\frac{x}{1-xy}=\frac{(xy-1)(x)}{(y)(1-xy)}=$$

$$=\frac{(-1)(1-xy)(x)}{(y)(1-xy)}=\frac{(-1)(x)}{(y)}=-\frac{x}{y}$$

ملاحظة من الخطأ اختصار $\frac{2x^2+y}{3x^2}$ و $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}$ كما يلي:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{2x^2+y}{3x^2}=\frac{2+y}{3}$$

تمارين

تمرين ١: اختصر الكسور الجبرية التالية:

$$1)\frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)} \qquad 2)\frac{x^2-x-20}{3x-15} \qquad 3)\frac{x^3-9x}{x^3+x^2-6x} \qquad 4)\frac{a^3+8}{a^2-8}$$

$$5)\frac{x^2+3x-40}{-x^2+3x+10} \qquad 6)\frac{10x^2-3x-1}{2x^2+5x-3} \qquad 7)\frac{2x^3-6x^2+5x-15}{9-x^2} \qquad 8)\frac{x^3-x^2+x}{x^3+1}$$

تمرين ٢: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{x^2+x}{2x+3}\cdot\frac{3x^2+19x+28}{x^2+5x+4} \qquad 2)\frac{x^2-16}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2-4x-21}{x^2-4x}$$

$$3)\frac{12m^2+28m+15}{6m^2+35m+25}\cdot\frac{2m^2-m-3}{3m^2+11m-20} \qquad 4)\frac{6u^2-5u+1}{3u^2+11u-4}\div\frac{2u^2+3u-2}{u^2+3u-4}$$

$$5)\frac{z^2-81}{z^2-16}\div\frac{z^2-z-20}{z^2+5z-36} \qquad 6)\frac{2a^2-5a+3}{a^2+a-2}\div\frac{3a^2-8a-3}{a^2-a-6}$$

تمرين ٣: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{9x+1}{2x-1}-\frac{3x+4}{2x-1} \qquad 2)\frac{x+1}{2x+3}+\frac{2x-1}{2x-3} \qquad 3)\frac{x}{x^2-9}-\frac{3x-1}{x^2+7x+12}$$

$$4)\frac{1}{x}+\frac{2}{3x-1}\cdot\frac{3x^2+11x-4}{x-5} \qquad 5)\frac{x+1}{x-3}-\frac{2x}{x-3}\div\frac{x+5}{x-3} \qquad 6)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right)$$

تمرين ٤: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x+1}+\frac{4}{4x+1} \qquad 2)\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-16}$$

$$3)\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{5}{x^2+3x-10} \qquad 4)\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2x}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2-4}$$

تمرين ٥: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-1}}{\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+3}} \qquad 2)\frac{\frac{x+2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{2x^2-x-1}+\frac{1}{x-1}} \qquad 3)\frac{\frac{z^2+3z-10}{z^2+z-6}}{\frac{z^2-z-30}{2z^2-15z+18}} \qquad 4)\frac{\frac{2y^2+11y+15}{y^2-4y-21}}{\frac{6y^2+11y-10}{3y^2-23y+14}}$$

تمرين ٦ : احسب واختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{(x+h)^{-2}-x^{-2}}{h} \quad 2)\ \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \quad 3)\ \frac{a^{-1}}{a^{-1}+a^{-2}} \quad 4)\ \frac{a^{-1}b-ab^{-1}}{a^{2}+b^{2}} \quad 5)\ \frac{1+\frac{1}{p-2}}{1-\frac{1}{p+3}} \quad 6)\ \frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

الفصل الثاني

المعادلات

١. تعريف المعادلات

المعادلة هي التساوي بين عبارتين. وعادة ما تكون هاتان العبارتان كثيرتي حدود. وتكون هذه المعادلة إما صحيحة لقيم معينة للمتغير و خاطئة لقيم أخرى. فمثلا المعادلة $2x+1=7$ تكون صحيحة عندما $x=3$ وخاطئة لأي قيمة أخرى ل x. إذا نقول أن $x=3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3 تصبح المعادلة $2(3)+1=7$ وهذا صحيح.

إذا عملية حل معادلة ما هي إلا إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة. فمثلا $x=2, x=3$ هي حلول للمعادلة $x^2-5x+6=0$.

المعادلات المتطابقة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول وتتم عملية حل معادلة في متغير x بإيجاد سلسلة من المعادلات المطابقة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل: $x=$ *ثابت*.

لإيجاد هذه المعادلات المطابقة عادة ما نتبع الطرق التالية:

- اختصار العبارات في طرفي المعادلة إما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل الإبدالية، التجميعية والتوزيعية. $2x+3+5x=-11$ و $7x+3=-11$ معادلتان متطابقتان.
- طرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة. $3x-7=2$ و $3x=9$ معادلتان متطابقتان.
- ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط أن لا يكون هذا العدد يساوي صفر.
  $\frac{5}{6}x=10$ و $x=12$ معادلتان متطابقتان

٢. حل المعادلات الخطية

معادلة خطية في متغير واحد x هي معادلة يمكن كتابتها على شكل:

$ax+b=0$ حيث a و b أعداد حقيقية و $a \neq 0$

مثال 1: حل المعادلات التالية: $1)\,2x+5=9 \quad 2)\,\frac{3}{4}x-6=0 \quad 3)\,(x+2)(5x+1)=5x(x+1)$

الحل:

١) يتم حل هذه المعادلة بطرح ٥ من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على ٣.

$$2x+5-5=9-5\ ,\ 2x=4\ ,\ x=4$$

٢) هنا نضيف ٦ إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ لنتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4}x-6=0\ ,\ \frac{3}{4}x-6+6=0+6\ ,\ \frac{3}{4}x=6\ ,\ \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{4}{3}\right)(6)\ ,\ x=8$$

٣) نقوم أولا بفك الأقواس ثم نطرح على التوالي $5x^2$, $5x$, 2 من طرفي المعادلة وفي الأخير نقسم على ٦.

$$(x+2)(5x+1)=5x(x+1)\ ,\ 5x^2+11x+2=5x^2+5x\ ,\ 11x+2=5x$$

$$6x+2=0\ ,\ 6x=-2\ ,\ x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\ ,\ x=-\frac{1}{3}$$

ملاحظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي صفر قبل أن نتخلص من المقام. وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها قي بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أن المعادلة ليس لها حل.

مثال ٢: حل المعادلات التالية: $1)\ \frac{x}{x-3}=\frac{24-5x}{x-3} \qquad 2)\ 1+\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}$

الحل:

١) أولا يجب أن ندرك أن $x \neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفر. ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x-3)$ لنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-3)\frac{x}{x-3}=(x-3)\frac{24-5x}{x-3}\ ,\ x=24-5x\ ,\ x+5x=24-5x+5x$$

$$6x=24\ ,\ \frac{6x}{6}=\frac{24}{6}\ ,\ x=4$$

وهذا يعتبر حلاً مقبولاً لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

٢) هنا كذلك يجب أن ندرك أن $x \neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفر. لنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x-5)$ ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-5)\left(1+\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right),\ (x-5)1+(x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$

$$x-5+x=5\ ,\ 2x-5=5\ ,\ 2x-5+5=5+5\ ,\ 2x=10\ ,\ x=5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفر فإذا الحل $x=5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول إن المعادلة الأصلية ليس لها حل.

تمارين

حل المعادلات التالية وتأكد من الحل:

$1)\ 2x+10=40$	$9)\ \frac{3}{x+2}=\frac{5}{2x-7}$	$14)\ \frac{3x}{x+4}=2-\frac{12}{x+4}$
$2)\ -3y+20=2$	$10)\ \frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+2}$	$15)\ \frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x-3}$
$3)\ 4x-11=7x+20$	$11)\ \frac{x+3}{x+5}=\frac{x-3}{x-4}$	$17)\ 5[x-(4x-5)]=3-2x$
$4)\ 4(2x-17)+5(3x-8)=0$	$12)\ 2+\frac{9}{m-3}=\frac{3m}{m-3}$	$18)\ 6[3y-2(y-1)]-2+7y=0$
$5)\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$	$13)\ \frac{4x-3}{2x}=\frac{2x-4}{x-2}$	$19)\ 4[2+(y+1)^2]=(y+2)^2$
$6)\ \frac{1}{2}x+7-\frac{1}{4}x=\frac{19}{2}$	$14)\ \frac{12+x}{-4}=\frac{5x-7}{3}+2$	$19)\ (y+3)^2=(y+4)^2+1$
$7)\ 5(x+3)(x-3)=5x(x-1)$		$21)\ (z-7)^2=(z-2)^2+9$
$8)\ \frac{40-3x}{5x}=\frac{6x+7}{8}$		

٣. حل المعادلات من الدرجة الثانية

معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0$.
هناك عدة طرق يمكن استخدامها لحل معادلة من الدرجة الثانية وسنتطرق إلى بعض منها في هذا الباب.

١,٣. طريقة التحليل

إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c باستخدام أعداد صحيحة فإذا يمكن تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي: $AB=0 \Leftrightarrow A=0$ أو $B=0$

مثال ٣: حل المعادلات التالية: $1)\ x^2+10x+25=0 \qquad 2)\ 2x^2+x-6=0$

الحل:

١) باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأيناها في هذا الفصل نجد أن $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$
وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)=0\ ,\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \ \text{أو}\ x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

إذا حلول $x^2+8x+15=0$ هي $x=-3$ و $x=-5$. وجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة الثانية ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

٢) يكون التحليل هنا بطريقة m,n,p,q لأن $a\neq 1$ ويكن الحل كالتالي:

$$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)=0\ ,\ 2x-3=0\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}\ ,\ x+2=0\Rightarrow x=-2$$

إذا حلول $2x^2+x-6=0$ هي $x=-2$ و $x=\dfrac{3}{2}$

٢,٣. طريقة الجذر التربيعي

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث: $A^2=B$ و $B>0$ إذا $A=\pm B$.

مثال ٤: حل المعادلات التالية: $1)\,x^2-5=0 \quad 2)\,(x+1)^2=49$

الحل:

١) بعد إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2-5+5=0+5\ ,\ x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

إذا الحلول هي: $x=\sqrt{5}$ و $x=-\sqrt{5}$

٢) هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$$(x+1)^2=49\ ,\ x+1=\pm\sqrt{49}\ ,\ x+1=\pm 7\ ,\ x=\pm 7-1\Rightarrow x=7-1=6 \text{ أو } x=-7-1=-8$$

إذا الحلول هي: $x=6$ و $x=-8$.

٣,٣. طريقة إكمال المربع

أولا نقوم بفصل الحد الثابت في المعادلة عن المتغير ثم نقسم طرفي المعادلة على a إذا كان $a \neq 1$ ثم نضيف القيمة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة. عند هذه المرحلة يصبح الجانب الأيسر من المعادلة مربعا كاملا ويكون تحليله على شكل $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$. ثم نتبع نفس خطوات الحل بطريقة الجذر التربيعي لبقية الحل.

مثال ٥: حل المعادلات التالية: $\quad 2)\, 2x^2 + 8x - 15 = 0 \qquad 1)\, x^2 - 2x + 6 = 0$

الحل

بعد فصل الثابت عن المتغير مع الملاحظة أن في هذه الحالة $a = 1$ ثم إضافة القيمة $\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$ تصبح المعادلة كالتالي:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \,,\; x^2 - 2x = 8 \,,\; x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 \,,\; (x-1)^2 = 9$$

عند هذه المرحلة تكون باقي الخطوات مماثلة لطريقة الجذر التربيعي كما يلي:

$$(x-1)^2 = 9 \,,\; x - 1 = \pm\sqrt{9} \,,\; x - 1 = \pm 3 \,,\; x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \text{ أو } x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2$$

٢) هنا الفرق عن الفقرة الأولى هو أن $a = 2$ أي أن $a \neq 1$ فإذا يجب القسمة على ٢ بعد مرحلة فصل الحد الثابت. ثم نتبع نفس الخطوات المتبعة في الفقرة الأولى ويكون الحل كالتالي:

$$2x^2 + 8x - 15 = 0 \,,\; 2x^2 + 8x = 15 \,,\; \frac{1}{2}(2x^2 + 8x) = \frac{1}{2}(15) \,,\; x^2 + 4x = \frac{15}{2}$$

إذا القيمة التي نضيفها إلى طرفي المعادلة هي $4 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ويكون باقي الحل كالتالي:

$$x^2 + 4x + 4 = \frac{15}{2} + 4 \,,\; (x+2)^2 = \frac{23}{2} \,,\; x + 2 = \pm\sqrt{\frac{23}{2}} \,,\; x = \pm\sqrt{\frac{23}{2}} - 2 \,,\; x = \frac{\pm\sqrt{46} - 4}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{46} - 4}{2} \text{ أو } x = \frac{-\sqrt{46} - 4}{2}$$

٤,٣. طريقة المميز

من طريقة إكمال المربع نصل إلى قانون مشهور وهو قانون المميز أو طريقة المميز. حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0$ هي $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ولأن القيمة b^2-4ac موجودة تحت الجذر فهناك ثلاثة حالات هي كالتالي:

- إذا كانت القيمة b^2-4ac موجبة فهناك حلان حقيقيان مختلفان: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- إذا كانت القيمة b^2-4ac تساوي الصفر فهناك حلان حقيقيان متشابهان: $x=\dfrac{-b}{2a}$
- إذا كانت القيمة b^2-4ac سالبة ليس هناك حلول حقيقية.

مثال ٦: حل المعادلات التالية: $3)\,3x^2+6x+7=0$ $\quad 2)\,x^2+6x+9=0$ $\quad 1)\,2x^2-5x+2=0$

الحل:

١) في هذه الحالة $a=2\ \ b=-5\ \ c=2$ إذا:

$$b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9>0$$

إذا هناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5\pm 3}{4}\ ,\ x=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2 \text{ أو } x=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

٢) في هذه الحالة $a=1\ \ b=6\ \ c=9$ إذا:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(1)(9)=36-36=0$$

إذا هناك حلان حقيقيان متشابهان وهما: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(6)}{2(1)}=-3$

٣) في هذه الحالة $a=3\ \ b=6\ \ c=7$ إذا: $b^2-4ac=(6)^2-4(3)(7)=36-84=-48<0$

إذا هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين

تمرين ١: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل

$1)\ x^2 - 2x - 15 = 0$ $\quad 2)\ 8y^2 + 189y - 72 = 0$ $\quad 3)\ 3x^2 - 7x = 0$

$4)\ 8 + 14t - 15t^2 = 0$ $\quad 5)\ (x-5)^2 - 9 = 0$ $\quad 6)\ (2x-5)^2 - (4x-11)^2 = 0$

تمرين ٢: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي

$1)\ x^2 = 81$ $\quad 2)\ 2x^2 - 48 = 0$ $\quad 3)\ (x-5)^2 = 36$

$4)\ (x-8)^2 = (x+1)^2$ $\quad 5)\ x^2 = (x+1)^2$ $\quad 6)\ 4x^2 = (2x+3)^2$

تمرين ٣: حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع

$1)\ x^2 + 8x - 10 = 0$ $\quad 2)\ x^2 - 6x = 0$ $\quad 3)\ x^2 + 7x - 2 = 0$

$4)\ 2x^2 + 10x - 3 = 0$ $\quad 5)\ 4x^2 - 4x + 15 = 0$ $\quad 6)\ 2 + 10x - 5x^2 = 0$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية بطريقة المميز

$1)\ x^2 - 2x - 15 = 0$ $\quad 2)\ x^2 + x - 1 = 0$ $\quad 3)\ 2x^2 + 4x + 1 = 0$

$4)\ 3x^2 - 5x + 3 = 0$ $\quad 5)\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 = 0$ $\quad 6)\ \frac{2}{3}x^2 - 5x + \frac{1}{2} = 0$

$7)\ -x^2 = 7x - 1$ $\quad 8)\ \sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$ $\quad 9)\ 2x^2 + \sqrt{5}x - 3 = 0$

تمرين ٥: أوجد قيمة k حيث أن المعادلات التالية يكون لها حلان متشابهان

$1)\ 16x^2 + kx + 9 = 0$ $\quad 2)\ x^2 + kx + 81 = 0$ $\quad 3)\ y^2 - 3y + k = 0$ $\quad 4)\ x^2 + 15x + k = 0$

٤. المتراجحات

٤,١. تعريف المتراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير واحد

المتراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير واحد هي المتراجحات التي يمكن كتابتها من الأشكال التالية:

$$(1)\ \ ax+b<c \qquad (2)\ \ ax+b\le c \qquad (3)\ \ ax+b>c \qquad (4)\ ax+b\ge c.$$

حيث a,b,c أعداد حقيقية و $a\neq 0$ ا

فمثلا كل من المتراجحات التالية هي متراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير واحد

$$(1)\ \ 2x+5<3 \qquad (2)\ -3x+7\le -2 \qquad (3)\ 3x-5>9 \qquad (4)\ 4x-3\ge 12$$

٤,٢. خصائص المتراجحات

- إذا كان $a<b$ فإن $a+c<b+c$

إضافة عدد حقيقي إلى طرفي المتراجحة يحفظ اتجاه المتراجحة فمثلا:

إذا كان $2<3$ فإن: $5+2<5+3$ أي $7<8$ و $2-6<3-6$ أي $-4<-3$

- إذا كان $a<b$ و $b<c$ فإن $a<c$

وتسمى هذه الخاصية الخاصية المتعدية فمثلا:

إذا كان $2<3$ و $3<5$ فإن: $2<5$

- إذا كان $a<b$ و $c>0$ فإن $ac<bc$

ضرب طرفي المتراجحة في عدد حقيقي موجب يحافظ على اتجاه المتراجحة فمثلا:

بما أن $2<3$ يكون لدينا $2\times 4<3\times 4$ أي $8<12$

- إذا كان $a<b$ و $c<0$ فإن $ac<bc$

ضرب طرفي المتراجحة في عدد حقيقي سالب يعكس اتجاه المتراجحة فمثلا:

بما أن $2<3$ يكون لدينا $2\times(-3)>3\times(-3)$ أي أن $-6>-9$

- إذا كان a,b كلاهما موجباً أو كلاهما سالباً و $a<b$ فإن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

قلب طرفي المتراجحة يعكس اتجاه المتراجحة للأعداد المتفقة في الإشارة فمثلا:

لدينا $3<5$ ومنه $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}$ و $-3>-2$ إذن $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$

٣,٤. حل المتراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير واحد

يمكن حل المتراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير واحد باستعمال الخصائص السابقة و حل المتراجحات هو إيجاد مجموعة الحلول أي إيجاد مجموعة الأعداد التي تحقق المتراجحة.

مثال ٧ : حل المتراجحة $-3x+5\geq 12$

الحل:

بطرح العدد 5 من طرفي المتراجحة يكون لدينا :

$$-3x+5-5\geq 12-5 \Rightarrow -3x\geq 7$$

نضرب طرفي المتراجحة في $-\frac{1}{3}$ وبما أن $-\frac{1}{3}$ عدد سالب فإن اتجاه المتراجحة يتغير. بمعنى آخر نقسم طرفي المتراجحة على -3 وبما أن -3 عدد سالب فإن اتجاه المتراجحة يتغير وتصبح:

$$\frac{-3x}{-3}\leq \frac{7}{-3} \Rightarrow x\leq -\frac{7}{3}$$

ومجموعة الحلول هي $\left\{x: x\leq -\frac{7}{3}\right\}=\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]$

مثال ٨: حل المتراجحات: $-3<\frac{7-2x}{3}\leq 4$

الحل:

لدينا هنا متراجحتان , لنحلهما معا في آن واحد. نضرب أطراف المتراجحتين في 3 وبما أن العدد 3 عدد موجب فإن اتجاه المتراجحتين لا يتغير

$$3(-3)<3\left(\frac{7-2x}{3}\right)\leq 3(4) \Rightarrow -9<7-2x\leq 12$$

بطرح العدد 7 من طرفي المتراجحة يكون لدينا

$$-16<-2x\leq 5$$

نقسم أطراف المتراجحتين على -2 وبما أن العدد -2 عدد سالب فنغير اتجاه المتراجحتين ويصبح:

$$8>x\geq -\frac{5}{2}$$

ومجموعة الحلول هي $\left\{x: -\frac{5}{2}\leq x\leq 8\right\}=\left[-\frac{5}{2}, 8\right)$

٤,٤. المتراجحات التي تحوي على القيم المطلقة

لحل المتراجحات التي تحوي على القيم المطلقة نستعمل الخصائص التالية :

إذا كانت $a > 0$ فإن:

$1)\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \qquad 2)\ |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

$3)\ |x| > a \Leftrightarrow x > a$ أو $x < -a \qquad 4)\ |x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ أو $x \le -a$

مثال ٩: حل المتراجحة: $|x| \le 3$

الحل:

لدينا من الخاصية (2) : $|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$ ومجموعة الحلول هي المجال المغلق $[-3, 3]$

مثال ١٠: حل المتراجحة: $|x-4| < 5$

الحل:

لدينا من الخاصية (1) : $|x-4| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-4 < 5$

بإضافة العدد ٤ لجميع أطراف المتراجحة نحصل على: $-5+4 < x-4+4 < 5+4$ ومنه $-1 < x < 9$

وبالتالي فإن ومجموعة الحلول هي المجال المفتوح $(-1, 9)$

مثال ١١: حل المتراجحة: $|x| > 3$

الحل:

لدينا من الخاصية (3) لدينا: $|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ أو $x < -3$

وبالتالي فإن ومجموعة الحلول هي: $\{x : x < -3 \text{ or } x > 3\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

مثال ١٢: حل المتراجحة: $|x+2| \ge 8$

الحل:

لدينا من القانون (4) : $|x+2| \ge 8 \Leftrightarrow x+2 \ge 8$ أو $x+2 \le -8$ وبالتالي:

$\Rightarrow x+2-2 \ge 8-2$ أو $x+2-2 \le -8-2 \Rightarrow x \ge 6$ أو $x \le -10$

وبالتالي فإن ومجموعة الحلول هي: $\{x : x \le -10$ أو $x \ge 6\} = (-\infty, -10] \cup [6, +\infty)$

مثال ١٣: حل المتراجحة: $|5-3x| \ge 1$

الحل:

من الخاصية (4) لدينا: $|5-3x|\geq 1 \Leftrightarrow 5-3x\geq 1$ أو $5-3x\leq -1$

$\Rightarrow 5-3x-5\geq 1-5$ أو $5-3x-5\leq -1-5 \Rightarrow -3x\geq -4$ أو $-3x\leq -6$

بالقسمة على -3 يتغير اتجاه المتراجحات ويكون لدينا:

$$\frac{-3x}{-3}\leq\frac{-4}{-3} \text{ أو } \frac{-3x}{-3}\geq\frac{-6}{-3} \Rightarrow x\leq\frac{4}{3} \text{ أو } x\geq 2$$

وبالتالي فإن ومجموعة الحلول هي:

$$\{x: x\leq\frac{4}{3} \text{ أو } x\geq 2\}=\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup[2,+\infty)$$

مثال ١٤: حل المتراجحة: $|x-3|<0.01$

الحل:

لدينا من الخاصية (1): $|x-3|<0.01 \Leftrightarrow -0,01<x-3<0,01$

بإضافة العدد 3 لجميع أطراف المتراجحة نحصل على:

$3-0,01<x<3+0,01$ ومنه $2.99<x<3,01$

وبالتالي فإن ومجموعة الحلول هي المجال المفتوح $(2.99, 3.01)$.

مثال ١٥: أثبت أن: $|(2x-6)-2|<1$ عندما يكون $|x-4|<\frac{1}{2}$

الحل:

لدينا من الخاصية (1): $|x-4|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x-4<\frac{1}{2}$

بإضافة العدد 4 لجميع أطراف المتراجحة نحصل على: $4-\frac{1}{2}<x<4+\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

نضرب كل الأطراف في 2 نحصل على: $7<2x<9$

نطرح العدد 8 من أطراف المتراجحة: $7-8<2x-8<9-8$

$$\Rightarrow -1<2x-8<1 \Rightarrow -1<2x-6-2<1 \Rightarrow -1<2x-6-2<1$$

من الخاصية (1) يكون لدينا: $|(2x-6)-2|<1$

تمارين: حل المتراجحات التالية:

$1)-x+2\le 3$	$5)2<3x+4\le 7$	$10)\left\|\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}\right\|<3$
$2)-x+4<-5$	$6)\frac{1}{5}\le 2x+\frac{2}{5}<\frac{4}{5}$	$11)\left\|-2x+16\right\|>\frac{1}{2}$
$3)-2x+\frac{4}{3}>8$	$7)-1<2x-2<4$	$12)-4<\frac{2x-4}{3}\le 7$
$4)4\ge 2x-8$	$8)-1\le 2x+5<7$	$13)-5<-0.23x+2\le 2.35$
$5)4>\left\|-0.5x-2\right\|$	$9)2\ge\frac{4-2x}{5}>-4$	$14)\left\|-87.85x-0.025\right\|\ge 114.96$

رياضيات تخصصية

الدوال الأسية واللوغاريتمية

الدوال الأسية واللوغاريتمية

٣

الجدارة:

معرفة الدوال الأسية واللوغاريتمية والقدرة على حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الأسس والعمليات عليها.
- الدوال الأسية.
- الدوال اللوغاريتمية.
- حل المعادلات الأسية.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.

الوقت المتوقع للتدريب: ثمان ساعات.

الدوال الأسية واللوغاريتمية

يبدو أن محمد الخوارزمي هو أول من استخدم اللوغاريتمات ووضع لها جداول في بداية القرن الثالث الهجري (بداية القرن التاسع الميلادي)، رغم أن البعض يعتبرون الأسكتلندي *John Napier* هو الأول وذلك في سنة ١٦١٤م. وقد يعود أصل كلمة لوغاريتم إلى تغيير وقع في ترجمة اسم الخوارزمي إلى اللاتينية.

وتستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية في كثير من القوانين التجريبية، كما تستخدم اللوغاريتمات خاصة لتمثيل كميات كبيرة جدا.

١. الأسس

تعريف١: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو:

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad \text{مرة } n$$

بينما: $x^0 = 1$

مثال١: احسب كلا مما يلي:

1) 3^2 2) $(-2)^4$ 3) $(-3)^3$

الحل:

1) $3^2 = 3 \times 3 = 9$

2) $(-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 16$

3) $(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$

تعريف٢: ليكن لدينا عدد حقيقي $x \neq 0$ وعدد طبيعي n فيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مثال٢: احسب كلا مما يلي:

1) 3^{-2} 2) $(-2)^{-4}$ 3) $(-3)^{-3}$

الحل:

1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ 2) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$ 3) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$

تعريف٣: ليكن لدينا عددان حقيقيان x و y وعدد طبيعي n بحيث: $y=x^n$ فإن الجذر من الدرجة n للعدد y أو y أس $\frac{1}{n}$ هو كما يلي:

إذا كان n فرديا فإنه: $y^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{y}=x$

وإذا كان n زوجيا فإنه: $y^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{y}=|x|$

أي أن الجذر هو العملية العكسية للرفع إلى أس طبيعي.

يسمى الجذر من الدرجة ٢ بالجذر التربيعي ويرمز له بالرمز $\sqrt{\ }$ ، بينما يسمى الجذر من الدرجة ٣ بالجذر التكعيبي.

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب جذر من درجة زوجية للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال٣: احسب كلا مما يلي: $1)\ 8^{\frac{1}{3}}\quad 2)\ (-27)^{\frac{1}{3}}\quad 3)\ 16^{\frac{1}{4}}$

الحل:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2\qquad 2)\ (-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3\qquad 3)\ 16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$$

تعريف٤: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد كسري $\frac{p}{q}$ حيث q موجب فيكون x أس $\frac{p}{q}$ هو:

$$x^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

مثال٤: احسب كلا مما يلي: $1)\ (-27)^{\frac{2}{3}}\quad 2)\ 16^{-\frac{5}{4}}\quad 3)\ 25^{\frac{3}{2}}$

الحل:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{-27}\right)^2=(-3)^2=9$$

$$2)\ 16^{-\frac{5}{4}}=\frac{1}{16^{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

$$3)\ 25^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{25}\right)^3=5^3=125$$

نظرية١: كل عدد حقيقي يمكن تقريبه بعدد كسري.

مثال٥: قرّب كلا مما يلي بأعداد كسرية: $1)\ \sqrt{2}\quad 2)\ \pi\quad 3)\ \pi^2$

الحل:

$$1)\ \sqrt{2} \cong 1.4142 = \frac{14142}{10000} \qquad 2)\ \pi \cong 3.1416 = \frac{31416}{10000} \qquad 3)\ -\pi^2 \cong -9.8696 = -\frac{98696}{10000}$$

تعريف ٥: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد حقيقي α بحيث العدد الكسري التقريبي له هو $\frac{p}{q}$ و q موجب فيكون x أس α هو:

$$x^{\alpha} \cong x^{\frac{p}{q}}$$

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب الرفع إلى أس عدد حقيقي غير كسري أو عدد كسري مقامه عدد زوجي للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال ٦: احسب كلا مما يلي: $1)\ 3^{\sqrt{2}} \qquad 2)\ 2^{\pi}$

الحل:

$$1)\ 3^{\sqrt{2}} \cong 3^{1.14142} \cong 4.728 \qquad 2)\ 2^{\pi} \cong 2^{3.1416} \cong 8.825$$

نظرية ٢: ليكن لدينا أربعة أعداد حقيقية x و y و α و β فإن:

$$1)\ \left(x^{\alpha}\right)^{\beta} = x^{\alpha\beta} \quad 2)\ (x\,y)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha} \quad 3)\ x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta} \quad 4)\ \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta}$$

مثال ٧: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5x\,y^4} \qquad 2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right) \qquad 3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2} \qquad 4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6$$

الحل:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5xy^4}=\frac{10}{5}\frac{x^3}{x}\frac{y^2}{y^4}=2x^{3-1}y^{2-4}=2x^2y^{-2}=\frac{2x^2}{y^2}$$

$$2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right)=\frac{3^2x^2}{2^2y^2}\frac{5x^3}{y^4}\frac{2^2y^3}{3\times5x^4}=\frac{3^2\times5\times2^2x^5y^3}{2^2\times3\times5x^4y^6}=3xy^{-3}=\frac{3x}{y^3}$$

$$3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2}=x^{6-5}y^{-2-(-3)}z^{-1-2}=xyz^{-3}=\frac{xy}{z^3}$$

$$4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6=\left(\frac{(xy^3)^{\frac{1}{3}}}{(-x^2y)^{\frac{1}{4}}}\right)^6=\frac{(xy^3)^{\frac{6}{3}}}{(-x^2y)^{\frac{6}{4}}}=\frac{(xy^3)^2}{(-x^2y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2y^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2(-y)^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=x^{2-3}(-y)^{6-\frac{3}{2}}=x^{-1}(-y)^{\frac{9}{2}}=\frac{\left(\sqrt{-y}\right)^9}{x}$$

تجدر الإشارة إلى أننا وضعنا $-y$ تحت الجذر لأنه موجب وهذا يستنتج من $\sqrt[4]{-x^2y}$ فلابد أن يكون ما تحت جذر من درجة زوجية موجبا لكن x^2 موجب إذن $-y$ موجب أيضا.

٢. الدوال الأسية

تعريف ٦: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b\neq1$ ومتغير حقيقي x فإن الدالة الأسية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y=f(x)=b^x$

مثال ٨: حدد أساس كلا من الدوال الأسية التالية:

$$1)\ y=f(x)=2^{-x}\qquad 2)\ y=f(x)=\pi^x\qquad 3)\ y=f(x)=2^{\frac{x}{2}}$$

الحل:

١) الأساس هو $\frac{1}{2}$ لأن: $y=f(x)=2^{-x}=\frac{1}{2^x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

٢) الأساس هو π.

٣) الأساس هو $\sqrt{2}$ لأن: $y=f(x)=2^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^x$

نظرية ٣: ليكن لدينا المتغيران الحقيقيان u و v والعدد الحقيقي الموجب $b\neq1$ فإن:

$$1)\ b^u > 0$$
$$2)\ b^u b^v = b^{u+v}$$
$$3)\ \frac{b^u}{b^v} = b^{u-v}$$
$$4)\ \left(b^u\right)^v = b^{uv}$$

مثال ٩: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} \qquad 2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} \qquad 3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x$$

الحل:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{x}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{2}\right)^x$$

$$2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\left(5^2\right)^x}{\left(5^3\right)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} = \frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}}$$
$$= \frac{1}{5^7}\frac{1}{5^{2x}} = \frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x = \left((9)^{\frac{1}{x}}\,9\right)^x = 9\left(9^x\right)$$

٣. الدوال اللوغاريتمية

تعريف ٧: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y = f(x) = \log_b x$ بحيث: $x = b^y$.
أي أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ($\log_b b^x = x$ و $b^{\log_b x} = x$)

نظرية ٤: ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ y = \log_b u \Rightarrow u > 0$$
$$2)\ \log_b(uv) = \log_b|u| + \log_b|v|$$
$$3)\ \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b|u| - \log_b|v|$$
$$4)\ \log_b\left(u^v\right) = v\log_b|u|$$
$$5)\ \log_b 1 = 0$$
$$6)\ \log_b b = 1$$

مثال ١٠: اكتب كلا مما يلي باستخدام لوغاريتم واحد:

$$1)\ \log_3(x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x \qquad 2)\ -\log_2 6 + \log_2(3x-2) + \log_2(3-2x)$$

الحل:

$$1)\ \log_3(x+3)+2\log_3 10-\log_3 x=\log_3(x+3)+\log_3 10^2-\log_3 x=\log_3\left(\frac{(x+3)\times 10^2}{x}\right)$$
$$=\log_3\left(\frac{100(x+3)}{x}\right)$$
$$2)\ -\log_2 6+\log_2(3x-2)+\log_2(3-2x)=\log_2\left(\frac{(3x-2)(3-2x)}{6}\right)$$

حالات خاصة

تعريف ٨: اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم ذو الأساس ١٠.

يرمز له بالرمز: $\log x$

مثال ١١: احسب كلا مما يلي:

$1)\ \log 100+\log 0.001-\log 1000 \qquad 2)\ -\log 0.1-\log 0.01+\log 1000$

الحل:

$$1)\ \log 100+\log 0.001-\log 1000=\log 10^2+\log 10^{-3}-\log 10^3=2-3-3=-4$$
$$2)\ -\log 0.1-\log 0.01+\log 1000=-\log 10^{-1}-\log 10^{-2}+\log 10^3=-(-1)-(-2)+3=6$$

تعريف ٩: اللوغاريتم الطبيعي (أو النيبيري) هو اللوغاريتم ذو الأساس e حيث:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cong 2.71828$$

يرمز له بالرمز: $\ln x$

و كانت هناك جداول لحساب اللوغاريتمات الطبيعية ولكن يمكن استخدام الآلة الحاسبة أيضا.

مثال ١٢: باستخدام الآلة الحاسبة، قرّب كلا مما يلي:

$1)\ \ln 10 \qquad 2)\ \ln 3.15 \qquad 3)\ \ln\sqrt{2}$

الحل:

$1)\ \ln 10\cong 2.3026 \qquad 2)\ \ln 3.15\cong 1.1474 \qquad 3)\ \ln\sqrt{2}\cong 0.3466$

نظرية ٥: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b\neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن:

$$1)\ b^x=e^{x\ln b} \qquad 2)\ \log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بالانتقال من أي أساس إلى الأساس الطبيعي سواء بالنسبة للدوال الأسية أو الدوال اللوغاريتمية.

مثال ١٣: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2 10 \qquad 2)\ \log_5 \sqrt{2} \qquad 3)\ \log_{\sqrt{2}} 5$$

الحل:

$$1)\ \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cong \frac{2.3026}{0.6931} = 3.322$$

$$2)\ \log_5 \sqrt{2} = \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 5} \cong \frac{0.3466}{1.6094} = 0.215$$

$$3)\ \log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln \sqrt{2}} \cong \frac{1.6094}{0.3466} = 4.643$$

٤. المعادلات الأسية واللوغاريتمية

نظرية ٦ : ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v فإن:

$$\ln u = \ln v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بحل المعادلات الأسية وكذا المعادلات اللوغاريتمية بعد تغيير أساس اللوغاريتمات إلى الأساس الطبيعي إن احتيج لذلك.

مثال ١٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 5^{3x-2} = 4 \qquad 2)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} = 9^{2x-3} \qquad 3)\ \left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1} = \frac{25}{16}$$

الحل:

$$1)\ 5^{3x-2} = 4 \Leftrightarrow \ln 5^{3x-2} = \ln 4 \Leftrightarrow (3x-2)\ln 5 = \ln 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{\ln 4}{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\ln 4}{\ln 5} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{\ln 4}{\ln 5} + 2}{3} \cong 0.954$$

$$2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=9^{2x-3}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=\ln 9^{2x-3}\Leftrightarrow (3x+1)\ln\frac{1}{2}=(2x-3)\ln 9$$

$$\Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}=2x\ln 9-3\ln 9\Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2}-2x\ln 9=-3\ln 9-\ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(3\ln\frac{1}{2}-2\ln 9)=-3\ln 9-\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{-3\ln 9-\ln\frac{1}{2}}{(3\ln\frac{1}{2}-2\ln 9)}\cong 0.018$$

$$3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\frac{25}{16}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\ln\frac{25}{16}\Leftrightarrow (x^2+2x-1)\ln\frac{4}{5}=\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1=\frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}}{\ln\frac{4}{5}}\Leftrightarrow x^2+2x-1=\frac{-2\ln\frac{4}{5}}{\ln\frac{4}{5}}\Leftrightarrow x^2+2x-1=-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1+2=0\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$$

مثال ١٥: حل المعادلات التالية:

$1)\ \ln x=2 \qquad 2)\ \ln(3x-5)=5 \qquad 3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2$

الحل:

$$1)\ \ln x=2\Leftrightarrow \ln x=\ln e^2\Leftrightarrow \begin{cases}x=e^2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=e^2\cong 7.389$$

$$2)\ \ln(3x-5)=5\Leftrightarrow \ln(3x-5)=\ln e^5\Leftrightarrow \begin{cases}3x-5=e^5\\ 3x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow 3x=e^5+5\Leftrightarrow x=\frac{e^5+5}{3}\cong 51.138$$

$$3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x-2)(x+3)=\ln 2\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+3)=2\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-6=2\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-6-2=0\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-8=0\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}$$

نحل المعادلة: $x^2+x-8=0$

نحسب المميز: $\Delta=b^2-4ac=1^2-(4\times 1\times -8)=33>0$

إذن للمعادلة جذران حقيقيان هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{33}}{2\times 1} \cong -3.372$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{33}}{2\times 1} \cong 2.372$$

نتحقق من شروط المعادلة (المتراجحتان):

بالنسبة للجذر الأول: $x_1 - 2 \leq 0$ إذن الجذر مرفوض.

بالنسبة للجذر الثاني: $x_2 - 2 > 0$ و $x_2 + 3 > 0$ إذن الجذر مقبول..

خلاصة: الحل هو: $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \cong 2.372$

مثال ١٦: حل المعادلات التالية:

1) $\log_3 x = 2$ 2) $\log_6 (3x-5) = 5$ 3) $\log_2 (x-2) + \log_2 (x+3) = 1$

الحل:

$$1)\ \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

$$2)\ \log_6 (3x-5) = 5 \Leftrightarrow \frac{\ln(3x-5)}{\ln 6} = 5 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = 5\ln 6 \Leftrightarrow \ln(3x-5) = \ln 6^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 6^5 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-5 = 7776 \Leftrightarrow 3x = 7776+5 \Leftrightarrow x = \frac{7781}{3} = 2593.67$$

$$3)\ \log_2 (x-2) + \log_2 (x+3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x-2)(x+3) = 1 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x-2)(x+3)}{\ln 2} = 1 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)(x+3) = \ln 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) = 2 \\ x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

وقد مرت علينا هذه المعادلة في الفقرة ٣ من المثال ١٥، والحل هو: $x = \frac{-1+\sqrt{33}}{2\times 1} \cong 2.372$.

مثال ١٧: حل المعادلات التالية:

1) $x^4 = 2$ 2) $x^{4.1} = 2$ 3) $\sqrt[5]{x} = 3x^{-3.5}$

الحل:

$$1)\ x^4 = 2 \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 2 \Leftrightarrow 4\ln|x| = \ln 2 \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{\ln 2}{4} \Leftrightarrow \ln|x| = \ln e^{\frac{\ln 2}{4}} \Leftrightarrow |x| = e^{\frac{\ln 2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{e^{\ln 2}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2} \cong \pm 1.189$$

$$2)\ x^{4.1} = 2 \Leftrightarrow \ln x^{4.1} = \ln 2 \Leftrightarrow 4.1\ln x = \ln 2 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 2}{4.1} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\ln 2}{4.1}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln 2}{4.1}}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{1}{4.1}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{4.1}} \cong 1.184$$

$$3)\ \sqrt[5]{x} = 3x^{-3.5} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{5}} = 3x^{-3.5} \Leftrightarrow x^{0.2}x^{3.5} = 3 \Leftrightarrow x^{3.7} = 3 \Leftrightarrow \ln x^{3.7} = \ln 3 \Leftrightarrow 3.7\ln x = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{\ln 3}{3.7} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\ln 3}{3.7}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln 3}{3.7}} \Leftrightarrow x = \left(e^{\ln 3}\right)^{\frac{1}{3.7}} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{3.7}} \cong 1.346$$

تجدر الإشارة إلى أننا استخدمنا القيمة المطلقة في الفقرة ١ لأن الرفع إلى أس ٤ معرف بالنسبة للأعداد السالبة ولم نستخدمها في الفقرتين ٢ و ٣ لأن الرفع إلى أس ٤,١ و ٣,٥ غير معرف إلا للأعداد الموجبة وذلك حين نستخدم الأعداد الحقيقية..

تمارين

تمرين ١: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{x^2y^6}}{\sqrt[6]{x^2y^{18}}} \qquad 2)\ \frac{2x^{-5}}{15y^3}\times\frac{3^2x^3y}{10} \qquad 3)\ \left(\frac{-2x^6z}{x^{-2}y^3}\right)^3\left(\frac{y^6}{10x^2y^3z}\right)^2$$

$$4)\ \frac{x^{4.1}y^{3.2}}{z^2}\times\left(\frac{z^{5.3}x^{-2.7}}{y^{4.6}}\right)^{1.7} \qquad 5)\ \frac{\sqrt[4]{x^{2.4}z^{1.2}}}{\sqrt[3]{y^{5.4}x^{1.5}}}\times\frac{\sqrt{y^{4.2}z^{-5}}}{\sqrt[6]{x^{1.8}}}$$

تمرين ٢: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{2^{x+1}}{2^{x-1}} \qquad 2)\ \frac{3^{1-2x}}{6^{x+2}}\times\frac{2^{x+3}}{8} \qquad 3)\ \left(e^{2x}\right)^3\left(1-2e^x\right)^2$$

تمرين ٣: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1) \qquad 2)\ \ln(x+3)-2\ln(1-x)+4\ln x$$

$$3)\ \log_5 e^{x+1}-\log_3 e^{2-x} \qquad 4)\ \log_9(x^2-1)-\log_3(x+1)$$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4 \qquad 2)\ x^{-5}=2x^3 \qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}$$

تمرين ٥: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^{2.5}}=4 \qquad 2)\ x^{-0.5}=2x^3 \qquad 3)\ -2x^{1.6}=x^{-2}$$

تمرين ٦: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 2^x=5^{x+1} \qquad 2)\ \sqrt[x]{3}=3^x \qquad 3)\ \frac{2^{-x+2}}{6^x}=3^{x+1} \qquad 4)\ e^{x+3}=5$$

تمرين ٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x+\ln(2-x)=0 \qquad 2)\ -\ln(x+3)+\ln(-x+2)=\ln 4 \qquad 3)\ \ln(x+6)=\ln(2x-1)$$

تمرين ٨: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_2 x+\log_2(2-x)=0 \qquad 2)\ -\log_3(x+5)+\log_3(-x+1)=\log_3 2$$

$$3)\ \log(x-6)=\log(-2x+3) \qquad 4)\ \log x=3 \qquad 5)\ \log_2(x+3)+\log_5(x-2)=0$$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

مفهوم الدالة ومنحناها

مفهوم الدالة ومنحناها

٤

الجدارة:

معرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها.
- أنواع الدوال وتركيبها.
- بعض الدوال الجبرية المشهورة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تمثيل منحنيات الدوال.

الوقت المتوقع للتدريب: ثمان ساعات.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.

ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

١. تعريف الدالة

تعريف١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y. أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث إن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول بأن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y . .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

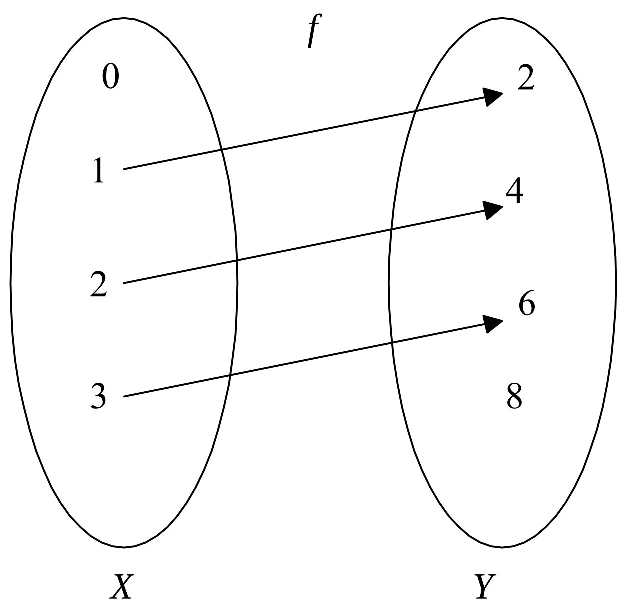
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال١: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

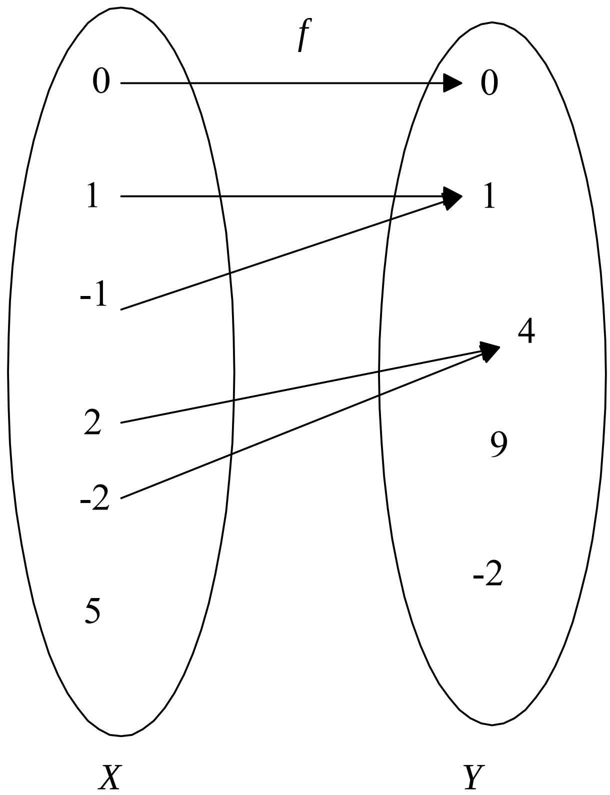
مثال٢: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X=\{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y=\{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0)=0,\ f(1)=f(-1)=1,\ f(2)=f(-2)=4$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y:

العناصر 0 و 1 و -1 و 2 و -2 في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(5)$ غير معرفة في Y..

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$$f: X \to Y$$

حيث: $f(x)=x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأن f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف ١:

$$x_1=x_2 \Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

مثال٣: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأن كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries*.

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلده الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries*. مثلا:

$$f(Riyadh)=Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers)=Algeria$$
$$f(Cairo)=Egypt$$
$$f(London)=United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثـــال ٤: لـتكن لـدينا المجموعتـان الســابقتان: $Cities$ و $Countries$ والعلاقــة g مــن $Cities$ إلى $Countries$ بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x.

العلاقة g دالة لأن كل عنصر x من $Cities$ وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من $Countries$. مثلا:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(Algiers) = Algeria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثـــال ٥: لـتكن لـدينا المجموعتـان السـابقتان $Countries$ و والعلاقـة f مـن $Countries$ إلى $Cities$ بحيث: $f(x)$ هو مدينة من البلد x.

هذه العلاقة ليست دالة لأنه مثلا: البلد $Saudi\ Arabia$ في علاقة مع أكثر من مدينة.واحدة.

تعريف ٢: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالـة f هـو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f.

مثال ٦: حدد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة ١ إلى ٤ ومداها.

الحل:

1) $D_f = \{1,2,3\} \qquad R_f = \{2,4,6\}$

2) $D_f = \{0,1,-1,2,-2\} \qquad R_f = \{0,1,4\}$

٣) لو نعتبر مجموعة العواصم $Capitals$ فيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$

4) $D_g = Cities \qquad R_g = Countries$

مثال ٧: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين بأن f دالة. ٢) حدد مجال f ومداها. ٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأن: $x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذن: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5) = 2 \times 5 = 10$ و $f(14) = 2 \times 14 = 28$.

مثال ٨: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بين بأن g دالة. ٢) حدد مجال g ومداها. ٣) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

١) g دالة لأن: $x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$

٢) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذن: $D_g = \mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذن: $R_g = \mathrm{R}$ لأن: $y = 2 \times \frac{y}{2} = 2\left(\frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{y}{2}\right)$

مثلا: $3 = g(1.5)$ و $0.6 = g(0.3)$.

٣) $g(2.5) = 2 \times 2.5 = 5$ و $g(5) = 2 \times 5 = 10$.

تعريف ٣: تكون الدالتان f و g متساويتين إذا تحقق ما يلي:

1) $D_f = D_g$

2) $x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

مثال ٩: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٣ و ٤ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج الفقرتين ٣ و ٤ من المثال ٦ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$D_f = Capitals \neq D_g = Cities$

مثال ١٠: هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين ٧ و ٨ على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج المثالين ٧ و ٨ فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$D_f = \mathrm{N} \neq D_g = \mathrm{R}$

مثال ١١: لتكن لدينا الدالة التالية:

$$g:\mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

حيث: $g(x) = x^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة في المثال ٧. هل $f = g$ ؟

الحل:

رغم أن الشرط الأول للتساوي (تعريف ٣) متحقق وهو: $D_f = \mathrm{N} = D_g$

فإن الشرط الثاني غير متحقق: مثلا $3 \in D_f = \mathrm{N}$ لكن $f(3) = 2\times 3 = 6 \neq g(3) = 3^2 = 9$

ومنه فإن: $f \neq g$.

٢. أنواع الدوال

تعريف ٤: نقول عن دالة $f : X \to Y$ إنها تطبيق إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، أي أن مجالها هو مجموعة المنطلق: $D_f = X$.

مثال ١٢: حدد في كل من الأمثلة ١ إلى ٤ و ٧ و ٨ و ١١ ، هل الدالة المعتبرة تطبيق أم لا؟

الحل:

في المثال ١ : لدينا الدالة $f : \{0,1,2,3\} \to \{2,4,6,8\}$ حيث $f(x) = 2x$.

$D_f = \{1,2,3\} \neq \{0,1,2,3\}$ (أي أن $f(0)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذن الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٢ : لدينا الدالة $f : \{0,1,-1,2,-2,5\} \to \{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x) = x^2$.

$D_f = \{0,1,-1,2,-2\} \neq \{0,1,-1,2,-2,5\}$ (أي أن $f(5)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذن الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٣: لدينا الدالة $f : Cities \to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x .

$D_f = Capitals \neq Cities$ (أي أن مثلا $f(Abha)$ غير معرفة في مجموعة الوصول) إذن الدالة ليست تطبيقا.

في المثال ٤ : لدينا الدالة $g : Cities \to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

$D_g = Cities$ إذن الدالة تطبيق.

في المثال ٧: لدينا الدالة $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $f(x) = 2x$.

$D_f = \mathrm{N}$ إذن الدالة تطبيق.

في المثال ٨: لدينا الدالة $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $g(x) = 2x$.

$D_g = \mathrm{R}$ إذن الدالة تطبيق.

في المثال ١١: لدينا الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

$D_g=\mathrm{N}$ إذن الدالة تطبيق.

نظرية ١: إذا كانت $f:X\to Y$ دالة فإن $f:D_f\to Y$ تطبيق.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تطبيق باستبدال مجموعة المنطلق بمجال الدالة (أي أننا نحذف من مجموعة المنطلق العناصر التي ليس لها صورة في مجموعة الوصول).

مثال ١٢: حوّل الدوال التي ليست تطبيقات في المثال ١٢ إلى تطبيقات.

الحل:

في المثال ١: الدالة $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$ هي تطبيق..

في المثال ٢: الدالة $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$ هي تطبيق .

في المثال ٣: الدالة $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x.هي تطبيق..

تعريف ٥: نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تباين (أو تطبيق متباين) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل صورة لها أصل واحد، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة فإن: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ و $D_f=X$.

مثال ١٣: نعتبر تطبيقات المثالين ١١ و ١٢. حدد هل هي تباينات أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق متباين لأن: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ ..

في المثال ٢: لدينا التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$.

.هذا التطبيق غير متباين لأنه مثلا: $f(1)=1^2=1=(-1)^2=f(-1)$ ..

في المثال ٣: لدينا التطبيق $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

هذا التطبيق متباين لأن كل بلد له عاصمة واحدة فقط: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ..

في المثال ٤: لدينا التطبيق $g:Cities\to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

.هذا التطبيق غير متباين لأنه مثلا: $g(Riyadh)=Saudi\ Arabia=g(Abha)$.

في المثال ٧: لدينا التطبيق $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=2x$.

.هذا التطبيق متباين لأن: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

في المثال ٨: لدينا التطبيق $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

.هذا التطبيق متباين لأن: $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

في المثال ١١: لدينا التطبيق $g{:}\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

.هذا التطبيق متباين لأن:

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2\Rightarrow\sqrt{x_1^{\ 2}}=\sqrt{x_2^{\ 2}}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2\ .$$

تجدر الإشارة إلى أننا حذفنا القيمة المطلقة لأن x_1 و x_2 هما عددان طبيعيان إذن موجبان وقيمتهما المطلقة تساويهما.

تعريف ٦: نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تغامر (أو تطبيق غامر) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة الوصول له أصل واحد على الأقل، أي أن: $R_f=Y$ و $D_f=X$.

مثال ١٤: نعتبر تطبيقات المثالين ١١ و ١٢. حدد هل هي تغامرات أم لا؟

الحل:

في المثال ١: لدينا التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6,8\}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f=\{2,4,6\}\neq\{2,4,6,8\}$..

مثلا: العنصر ٨ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة (رغم أنه زوجيا)..

في المثال ٢: لدينا التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4,9,-2\}$ حيث $f(x)=x^2$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f=\{0,1,4\}\neq\{0,1,4,9,-2\}$..

مثلا: العنصر ٩ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة (رغم أنه مربعا تاما).

في المثال ٣: لدينا التطبيق $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x...

هذا التطبيق غامر لأن كل بلد له عاصمة : $R_f=Countries$..

في المثال ٤: لدينا التطبيق $g:Cities\to Countries$ حيث $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x.

.هذا التطبيق غامر لأن كل بلد له مدينة واحدة على الأقل : $R_g=Countries$..

في المثال ٧: لدينا التطبيق $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=2x$.

هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f=\{2,4,6,8,10,\cdots\}\neq\mathrm{N}$..

مثلا: العنصر ١ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة لأنه ليس زوجيا..

في المثال ٨: لدينا التطبيق $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

.هذا التطبيق غامر لأن: $R_f=\mathrm{R}$.

في المثال ١١: لدينا التطبيق $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$.

.هذا التطبيق ليس غامرا لأن: $R_f=\{1,4,9,16,25,\cdots\}\neq\mathrm{N}$.

مثلا العنصر ٢ ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة لأنه ليس مربعا تاما..

نظرية ٢: إذا كانت $f:X\to Y$ دالة فإن $f:D_f\to R_f$ تغامر.

ومن فوائد هذه النظرية أنه يمكن تحويل كل دالة إلى تغامر بحذف العناصر التي ليس لها صورة من مجموعة المنطلق والعناصر التي ليس لها أصل من مجموعة الوصول.

مثال ١٥: حول الدوال التي ليست تغامرات في المثال ١٤ إلى تغامرات.

الحل:

في المثال ١: التطبيق $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6\}$ حيث $f(x)=2x$ هو غامر.

في المثال ٢: التطبيق $f:\{0,1,-1,2,-2\}\to\{0,1,4\}$ حيث $f(x)=x^2$ هو غامر.

في المثال ٧: التطبيق $f:\mathrm{N}\to\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ حيث $f(x)=2x$ هو غامر. .

في المثال ١١: التطبيق $g:\mathrm{N}\to\{1,4,9,16,25,\cdots\}$ حيث $g(x)=x^2$ هو غامر.

.**تعريف ٧**: نقول عن دالة $f:X\to Y$ إنها تقابل (أو تطبيق متقابل) إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط ولكل عنصر من مجموعة الوصول أصل واحد فقط، أي أن الدالة تباين وتغامر في آن واحد.

مثال ١٦: باستخدام نتائج الأمثلة ١٣ و ١٤ و ١٥، اذكر التقابلات الممكنة من بين الدوال المعتبرة..

الحل:

التقابلات الممكنة من بين الدوال المعتبرة هي:

١) $f:\{1,2,3\}\to\{2,4,6\}$ حيث $f(x)=2x$.

٣) $f:Capitals\to Countries$ حيث $f(x)$ هو البلد الذي عاصمته المدينة x ...

٧) $f:\mathrm{N}\to\{2,4,6,8,10,\cdots\}$ حيث $f(x)=2x$.

٨) $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=2x$.

١١) $g:\mathrm{N}\to\{1,4,9,16,25,\cdots\}$ حيث $g(x)=x^2$.

والعلة في ذلك أنها كلها تباينات وتغامرات.

مثال ١٧: لتكن لدينا الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث: $f(x)=x^2$. هل هذه الدالة تقابل؟

الحل:

هذه الدالة ليست تقابل لأنها ليست تباين فمثلا: $f(1)=1^2=1=(-1)^2=f(-1)$.

خلاصة: تكون علاقة f من X إلى Y :

١) دالة إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٢) تطبيقا إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f=X$

٣) تباينا إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f=X$
و $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.

٤) تغامرا إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f=X$
و $R_f=Y$

٥) تقابلا إذا تحقق ما يلي: $x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $D_f=X$
و $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 لهما صورة.
و $R_f=Y$

٤. الدوال العددية

تعريف ٩: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال ٢٠ : كل الدوال المعرفة في المثال ١٨ هي دوال عددية.

١,٤. منحنى الدالة

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y=f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط (x,y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة...

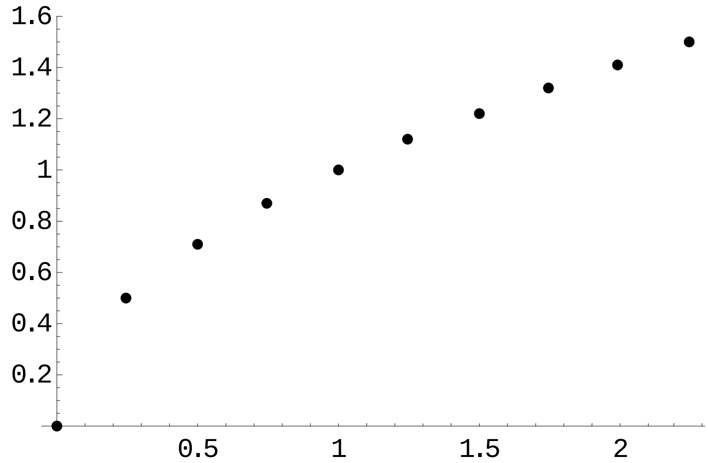
مثال ٢١: مثل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$.

الحل:

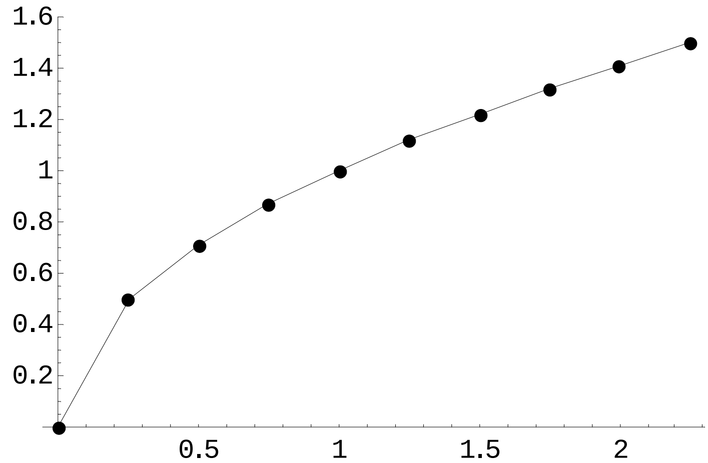
الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	1.50	2.25
$y=\sqrt{x}$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



تجدر الإشارة إلى أنه كلما كان جدول القيم أكثر دقة وأكثر قيما كان التمثيل أدق..

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

تعريف ١٠: نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

٢) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

مثال ٢٢: هل الدوال المعرفة في المثال ١٨ فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

١) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأن:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+1+x+1=2\neq 0$$

$$f(-x)-f(x)=(-x)+1-(x+1)=-x+1-x-1=-2x\neq 0$$

الدالة $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $g(x)=x^2$ زوجية لأن:

$$g(-x)-g(x)=(-x)^2-x^2=x^2-x^2=0$$

٢) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

الدالة $g:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $g(x)=x^2$ ليست فردية ولا زوجية لسبب مماثل للسبب السابق.

٣) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

٤) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأن مجالها لا يحتوي على الأعداد السالبة (السبب السابق).

٥. الدوال الجبرية

تعريف ١١: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة.(المطولة)

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التآلفية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

١,٥. الدالة الثابتة

وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a$ و a عدد حقيقي ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

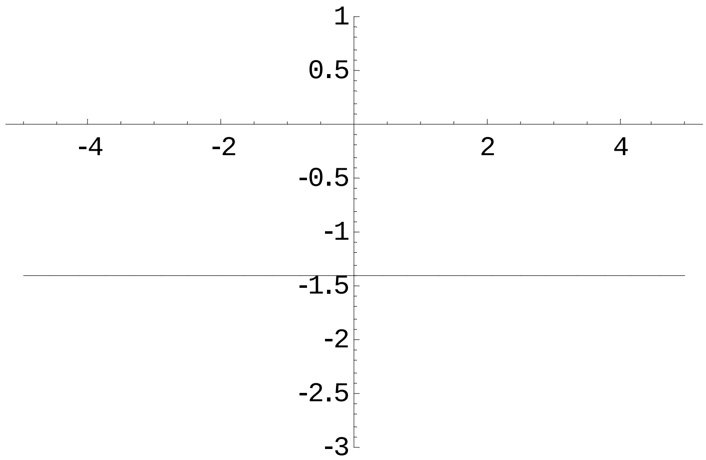
٢) $R_f=\{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.

٣) $f(-x)=f(x)$ أي أنها زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ٢٣: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}$.

الحل:



٢,٥. الدالة الخطية

: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=ax$ و $a\neq 0$ عدد حقيقي ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

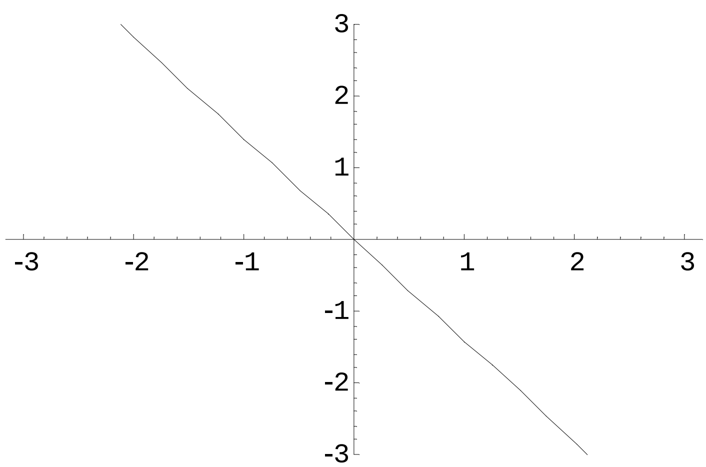
٢) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) $f(-x)=-f(x)$ أي أنها فردية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة المبدأ..

مثال ٢٤: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x$.

الحل:



٣,٥. الدالة التآلفية

وهي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=ax+b$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عددان حقيقيان ثابتان أي أنها كثير حدود من الدرجة الأولى.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

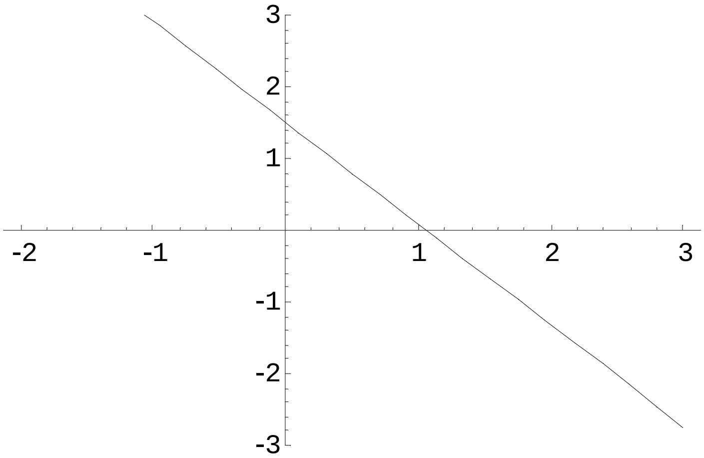
٢) $R_f=\mathbb{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل لا يمر من نقطة المبدأ.

مثال ٢٥: مثّل الدالة التالية: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x+1.5$.

الحل:



٤,٥. الدالة التربيعية

وهي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=ax^2+bx+c$ و $a\neq 0$ و b و c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثير حدود من الدرجة الثانية.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

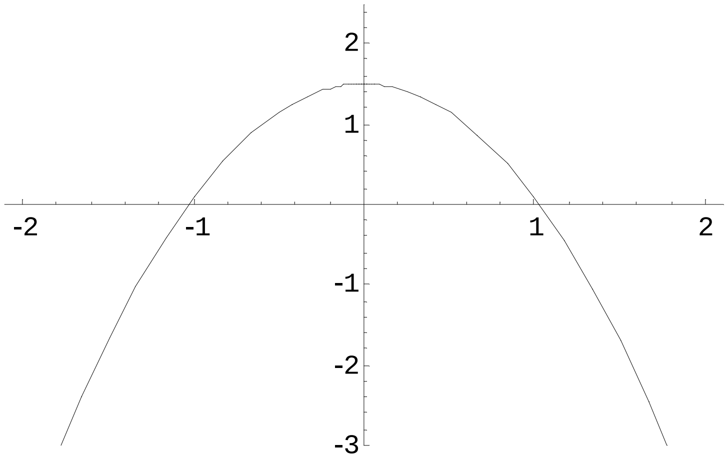
٢) $R_f\neq\mathbb{R}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b=0$.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة المبدأ إذا كان $b=c=0$.

مثال ٢٦: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x^2+1.5$.

الحل:



٦. الدوال غير الجبرية

أما الدوال غير الجبرية فمنها: الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

و**الدوال المثلثية** هي الدوال التي تكون معرّفة على الزوايا. ونقيس الزوايا بوحدة الراديان (الوحدة القياسية) أو بالدرجات (التي رمزها $^{\circ}$) وعلاقة التحويل بين هاتين الوحدتين هي: $\pi=180^{\circ}$

ومن الدوال المثلثية: دالة الجيب ودالة جيب التمام ودالة الظل ودالة قاطع التمام ودالة القاطع ودالة قوس الجيب ودالة قوس جيب التمام ودالة قوس الظل..

تعريف ١٢: نقول عن دالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ إنها دورية ذات دور $p>0$ إذا كان: $f(x+p)=f(p)$ من أجل أي عدد حقيقي $x\in D_f$ (و p أصغر ما يمكن)، أي أن قيم الدالة تتكرر بشكل منتظم.

تعريف ١٣: إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان x مقياس أحد زاويتيه غير القائمتين فإن:

$\sin x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية غير الوتر على طول الوتر،

و $\cos x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الوتر.

١,٦. دالة الجيب

ويرمز لها بالرمز: $\sin$ وهي من الشكل: $\sin:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=\sin x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

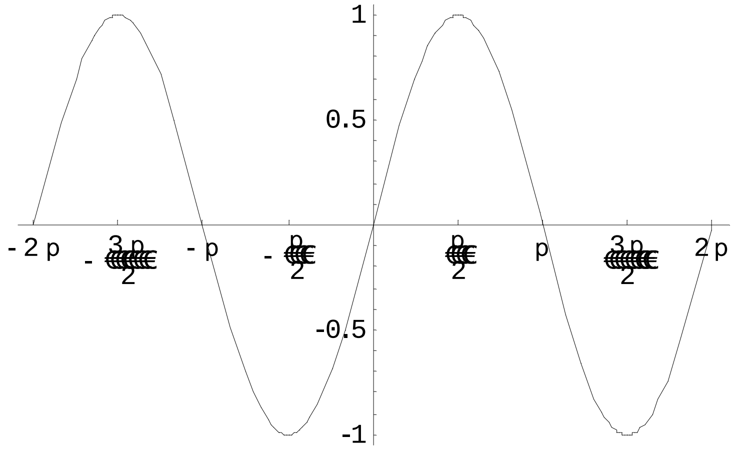
١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=[-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1\le\sin x\le 1$ ...

٣) $\sin(-x)=-\sin x$ أي أنها فردية.

٤) $\sin(x+2\pi)=\sin x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة تمر من نقطة المبدأ.



٢,٦. دالة جيب التمام

ويرمز لها بالرمز: cos وهي من الشكل: $\cos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y=\cos x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

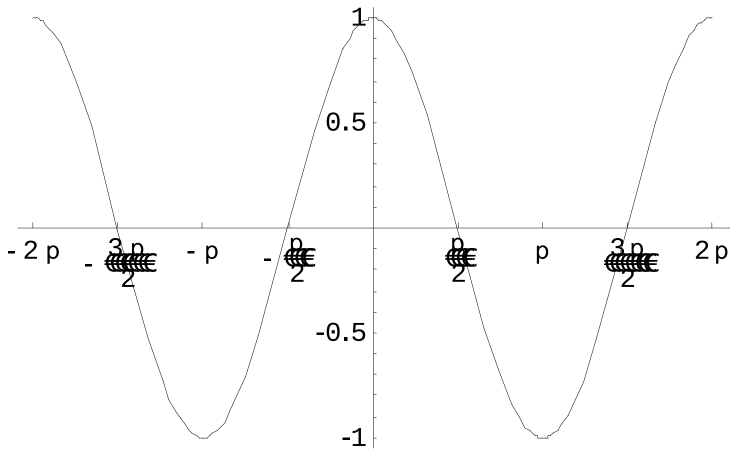
١) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \cos x \le 1$ ...

٣) $\cos(-x)=\cos x$ أي أنها زوجية.

٤) $\cos(x+2\pi)=\cos x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

٥) يمكن تمثيلها بموجة لا تمر من نقطة المبدأ.



٣,٦. الدوال الأسية

وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=b^{x}$ و $b\neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=[0,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $0<b^{x}$ ..

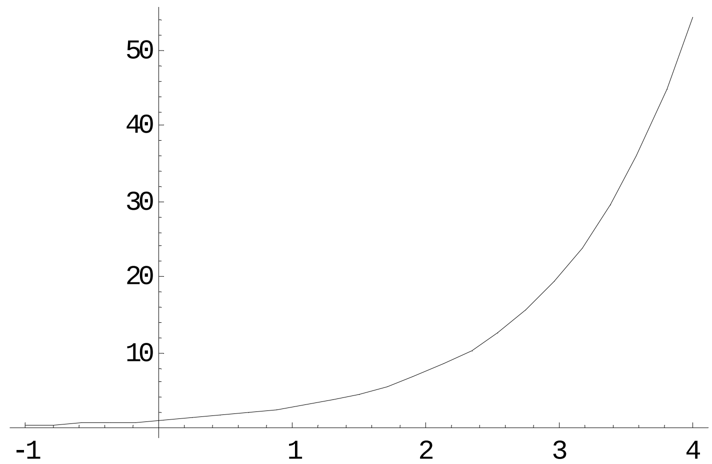
٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y=e^{x}$ حيث $e\cong 2.71828$. وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

٥) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال ٢٧: مثل الدالة التالية: $y=e^{x}$.

الحل:



٤,٦. الدوال اللوغاريتمية

ويرمز لها بالرمز: $\log_b$ وهي من الشكل: $\log_b:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=\log_b x$ إذا كان $x=b^{y}$ و $b\neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

٠) $\log_b(b^{x})=x$ و $b^{\log_b x}=x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

١) $D_f=(0,\infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

٢) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y=\ln x=\log_e x$ حيث $e \cong 2.71828$. وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

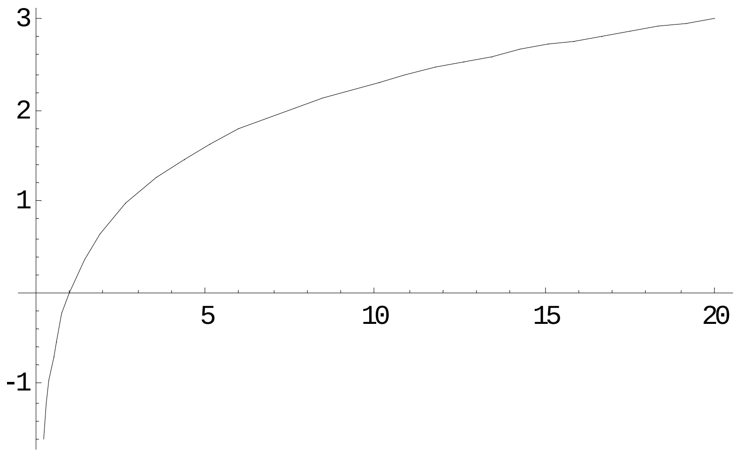
٥) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x=\dfrac{\ln x}{\ln b}$.

٦) قانون تغيير الأساس للدوال الأسية: $b^x=e^{x\ln b}$.

٧) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b..

مثال ٢٨: مثل الدالة التالية: $y=\ln x$.

الحل:



تمارين

تمرين ١: بين أن كلا من العلاقات التالية دوال:

1) $f:\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N},\ f(x)=x^3$ 2) $f:\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

3) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1$ 4) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$

تمرين ٢: حدد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها

تمرين ٣: حدد نوع كل دالة مما يلي (تطبيق، تباين، تغامر، تقابل):

1) $f:\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N},\ f(x)=x^3$ 2) $f:\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$

3) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1$ 4) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$

5) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ 6) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+1}$

تمرين 4: هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

1) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x$ 2) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

3) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|}$ 4) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=|x|$

تمرين 5: ما وجه الشبه بين الدوال الثابتة والخطية والتآلفية ووجه الفرق بينها؟

تمرين 6: مثل كلا من الدوال التالية:

1) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=\sin 2x$ 2) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|}$ 3) $f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=|x|$

تمرين 7: ما وجه الشبه بين دالتي الجيب وجيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

المملكـــة العربيـــة الســـعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات تخصصية

طرق العد والمتتابعات

طرق العد والمتتابعات

٥

الجدارة:

الالمام بطرق العد ومفهوم المتتابعات والمتسلسلات المنتهية

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على:

- التعبير عن المتتابعات المنتهية واللامنتهية وتمثيلها بالشكل.
- ايجاد قيم المتابعات الهندسية والحسابية.
- حساب الأوساط الحسابية والهندسية.
- ايجاد حدود المتسلسلات الهندسية والحسابية المنتهية.
- حساب مجموع المتسلسلات الهندسية والحسابية المنتهية.
- القاعدة الأساسية لطرق العد.
- حل المسائل باستحدام التباديل والتوافيق.
- ايجاد المفكوك باستعمال قانون ثنائي الحد.

الوقت المتوقع للتدريب: سبع ساعات للفصل الأول وخمس ساعات للفصل الثاني, بحيث يكون الوقت الكلي اثنتي عشر ساعة.

الفصل الأول

المتتابعات والمتسلسلات

١. المتتابعات

تعريف

المتتابعة هي دالة s مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية N أو مجموعة جزئية من N ومداها مجموعة جزئية من $\Re$ وعناصرها تسمى حدود المتتابعة.

وإذا كانت $n \in N$ ..فإن $s(n)$ تسمى الحد النوني للمتابعة.

ملاحظات

1) المتتابعة s يمكن التعبير عنها بالطرق التالية:

a) نظرا لأن مجال أي متتابعة هو N أو مجموعة جزئية من N فإنه يمكن أن نكتفي بكتابة حدود المتتابعة أي نكتب:

$$s(1), s(2), s(3),...., s(n),...$$

نلاحظ أنه متى علمنا الحد النوني $s(n)$ فإن المتتابعة تكون معروفة تماما.فمثلا إذا كان الحد النوني لمتابعة s .هو $2n$.فإننا نكتب المتتابعة كما يلي:

$$2, 4, 6, 8,....2n, ... \qquad (1)$$

و إذا كان الحد النوني لمتابعة s .هو $\frac{2n}{2n+1}$.فإننا نكتب المتتابعة كما يلي:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9},,....\frac{2n}{2n+1}, ... \qquad (2)$$

b) إذا اتفقنا على استخدام الرمز s_n للدلالة على الحد النوني للمتتابعة s فإنه يمكن استخدام الرمز $\{s_n\}$.للتعبير عن المتتابعة s التي حدها النوني s_n وتبعا للطريقة (أ) السابقة فإن s تكتب كالتالي:

$$s_1, s_2, s_3,...., s_n,...$$

فمثلا المتتابعة (1) يمكن كتابتها بالصورة: $\{2n\}$ لأن حدها النوني هو $2n$

والمتتابعة (2) يمكن كتابتها بالصورة: $\left\{\frac{2n}{2n+1}\right\}$ لأن حدها النوني هو $\frac{2n}{2n+1}$

وهكذا فإن الرموز ... $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\},$ تعني متتابعات حدودها النونية هي ... $a_n, b_n, c_n,$ على الترتيب.

c) حيث إن المتتابعة s دالة فإنه يمكن كتابة s كمجموعة أزواج مرتبة كما يلي:

$$s = \{(n, s_n) : n \in \mathrm{N}\}$$

فالمتتابعة (1) .يمكن كتابتها على الصورة: $\{(n, 2n) : n \in \mathrm{N}\}$

والمتتابعة (2) .يمكن كتابتها على الصورة: $\left\{\left(n, \dfrac{2n}{2n+1}\right) : n \in \mathrm{N}\right\}$

وتمثيلها بيانيا بواسطة نقط في المستوى الإحداثي.

2) ليس من الضروري وجود قانون معين للحد النوني لكل متتابعة، فمثلا متتابعة الأعداد الأولية:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

ليس لها قانون معين يعطي الحد النوني لها. وفي مثل هذه الحالة يجب كتابة العناصر كلها أو تذكر صفات هذه العناصر.

3) من تعريف التساوي بين الدوال تكون المتتابعتان $\{a_n\}, \{b_n\}$ متساويتين إذا تحقق الشرط التالي:

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

أي أن: $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3, \ldots$

مثال ١: المتتابعة $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

هي متتابعة:

$s_1 = 1 = 1^2$ حدها الأول

$s_2 = 4 = 2^2$ حدها الثاني

$s_3 = 9 = 3^2$ حدها الثالث

$s_4 = 16 = 4^2$ حدها الرابع ، .....

وهكذا فيكون حدها النوني: $s_n = n^2$

ويمكن التعبير عن هذه المتتابعة باستخدام الرمز $\{n^2\}$ ، كما أنه يمكن كتابتها كمجموعة الأزواج المرتبة:

$$\{(n, n^2) : n \in \mathrm{N}\}$$

مثال ٢: المتتابعة $1, -4, 9, -16, 25, -36, \ldots$

هي متتابعة:

$s_1 = 1 = (-1)^{1+1} \times 1^2$ حدها الأول

$s_2 = -4 = (-1)^{1+2} \times 2^2$ حدها الثاني

حدها الثالث $s_3 = 9 = (-1)^{1+3} \times 3^2$

حدها الرابع $s_4 = -16 = (-1)^{1+4} \times 4^2$ ، .....

وهكذا فيكون حدها النوني: $s_n = (-1)^{n+1} n^2$

ولذلك يمكن التعبير عنها بالصورة: $\{(-1)^{n+1} n^2\}$ كما أنه يمكن كتابتها كمجموعة الأزواج المرتبة

$$\{(n, (-1)^{n+1} n^2) : \ n \in \mathrm{N}\}$$

ملاحظات

1) المتتابعات المذكورة في المثالين السابقين تسمى متتابعات غير منتهية أو لا نهائية لأنه لا يوجد حد أخير لأي منها ، أي أنه يوجد بعد كل حد من حدودها حد آخر من حدود المتتابعة.

2) المتتابعتان

$$\{a_n\} = -3,0,6,12,18$$
$$\{b_n\} = -1,2,5,8,11,14,17,20,23$$

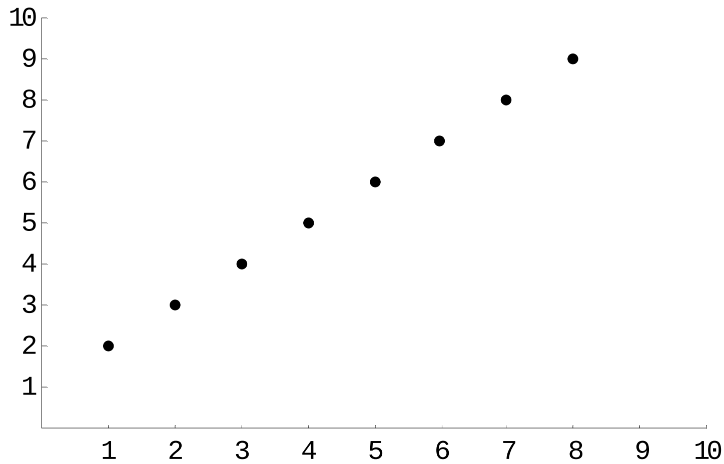
كل منهما متتابعة منتهية لأن كل منهما لها حد أخير. لاحظ أن $\{a_n\} \neq \{b_n\}$

مثال ٣: مثل المتتابعات التالية بيانيا:

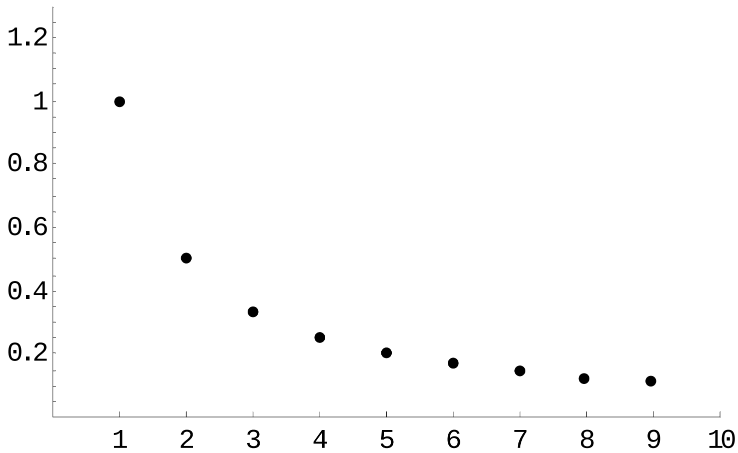
$$a) \quad \{a_n\} = 2,3,4,5,...., n+1,...$$
$$b) \quad \{b_n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n+1}, ...$$
$$c) \quad \{c_n\} = -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ..., (-1)^n \frac{1}{n+1}, ...$$
$$d) \quad \{d_n\} = 3,3,3,3,....,3,...$$

الحل:

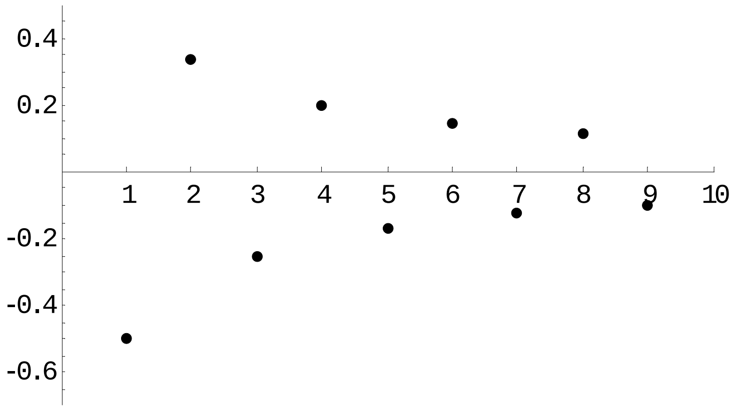
المتتابعة $\{a_n\} = \{n+1\}$ ممثلة في الشكل التالي:



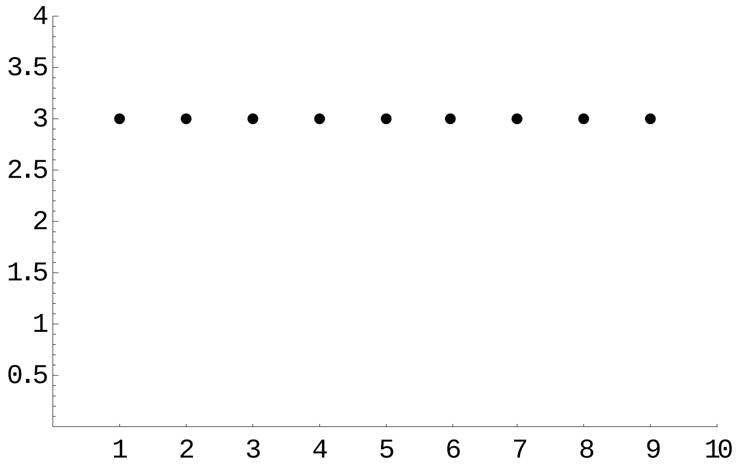
المتتابعة $\left\{b_n\right\}=\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ ممثلة في الشكل التالي:



المتتابعة $\left\{c_n\right\}=\left\{(-1)^n\frac{1}{n+1}\right\}$ ممثلة في الشكل التالي:



المتتابعة $\left\{d_n\right\}=\left\{3\right\}$.ممثلة في الشكل التالي:



١,١. المتتابعات الحسابية

المتتابعة $\{s_n\}$.تسمى متتابعة حسابية إذا حققت الشرط التالي:

$$s_1 = a,\ \ s_{n+1} = s_n + d \qquad \forall n \mathrm{N}$$

حيث a, d .عددان حقيقيان ثابتان، a : الحد الأول و d : الفرق العام للمتتابعة أو أساس المتتابعة الحسابية.ويعطى بالفارق بين حدين متعاقبين من حدود المتتابعة. من التعريف السابق.نستنتج أن المتتابعة الحسابية حدودها هي:

$$a\ , a+d\ , a+2d\ \ , a+3d\ , \ldots$$

أي أن:

$$s_1 = a,$$
$$s_2 = s_1 + d = a + d$$
$$s_3 = s_2 + d = a + 2d$$
$$s_4 = s_3 + d = a + 3d$$

و بالاستمرار بهذه الطريقة نستنتج أن الحد النوني s_n للمتتابعة الحسابية وهو:

$$s_n = a + (n-1)d\ \ :\ \ n \in \mathrm{N}$$

مثال٤: المتتابعات التالية هي متتابعات حسابية:

$a)$ 1, 2, 3, 4, ..., n, ...

متتابعة الأعداد الطبيعية حيث $s_1 = 1,\ d = 1$

$b)$ 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31

متتابعة حسابية منتهية حيث $s_1 = 19,\ d = 2$

$$c)\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ldots$$

متتابعة حسابية حيث $s_1=\frac{1}{2},\ d=-\frac{1}{6}$

$$d)\ 5, 9, 13, 17, \ldots$$

هي متتابعة حسابية غير منتهية حيث $s_1=5,\ d=4$

$$e)\ 1, -1, -3, -5, -7, \ldots$$

هي متتابعة حسابية حيث $s_1=1,\ d=-2$

مثال ٥: أوجد قيمة الحد العشرين للمتتابعة الحسابية:

$$1,\ -3,\ -7,\ -11, \ldots$$

الحل:

في المتتابعة السابقة نجد أن: $a=1,\ d=s_2-s_1=-3-1=-4$

ومنه: $s_{20}=a+(n-1)d=1+(20-1)(-4)=1+19(-4)=-75$

مثال ٦: متتابعة حسابية فيها $s_3=2,\ s_{15}=-46$ أوجد s_{50} فيها

الحل:

لدينا: $s_3=a+2d=2,\quad s_{15}=a+14d=-46$

بطرح المعادلتين نحصل على: $-12d=48 \Rightarrow d=-4$

بالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على: $a-8=2 \Rightarrow a=10$

ومنه: $s_{50}=a+(n-1)d=10+49(-4)=-186$

مثال ٧: مجموع ثلاثة أعداد تشكل متتابعة حسابية يساوي -3 وحاصل ضربها يساوي 8. أوجد هذه الأعداد.

الحل:

لتكن: $s_1=a, s_2=a+d,\ s_3=a+2d$

$$\Rightarrow s_1+s_2+s_3=a+(a+d)+(a+2d)=3a+3d=-3$$

$$\Rightarrow a+d=-1 \qquad (1)$$

ولدينا: $s_1s_2s_3=a(a+d)(a+2d)=8 \Rightarrow a(a+d)(a+d+d)=8 \qquad (2)$

نعوض (١) في (٢) فيكون لدينا: $-a(-1+d)=8 \Rightarrow a-ad=8 \qquad (3)$

من (١) لدينا (4) $a+d=-1 \Rightarrow d=-1-a$

نعوض في المعادلة (3) فنحصل على: $a-a(-1-a)=8 \Rightarrow a^2+2a-8=0 \Rightarrow (a-2)(a+4)=0$

ومنه: $a=-4$ أو $a=2$

إذا كان $a=-4$ فإن: $d=-1-a=-1+4=3$ والمتتابعة هي $-4,-1,2$

إذا كان $a=2$ فإن: $d=-1-a=-1-2=-3$ والمتتابعة هي $2,-1,4$

إذن الأعداد الثلاثة هي: $-4,-1,2$ أو $2,-1,4$

مثال٨: كم عدداً محصوراً بين 104 و 897 يقبل القسمة على 13

الحل:

لتكن: $s_1=104,\ s_n=897$

لدينا: $s_n=a+(n-1)d \Rightarrow 897=104+13(n-1)$

ومنه: $897-104=13n-13 \Rightarrow 13n=897-104+13=806 \Rightarrow n=\dfrac{806}{13}=62$

وبالتالي عدد الحدود هو: 62

١,١,١. الأوساط الحسابية

الأوساط الحسابية بين العددين a,b هي الحدود الأخرى للمتتابعة الحسابية التي حدها الأول a وحدها الأخير b. إذا كان a, b حدين من متتابعة حسابية وبينهما وسط حسابي واحد فإننا نحصل على:

a, c, b متتابعة حسابية:

$$\Rightarrow c-a=b-c \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$$

مثال٩: أدخل 5 أوساط حسابية بين العددين: $-13, 245$

الحل:

بإدخال 5 أوساط حسابية بين $-13, 245$ نحصل على متتابعة حسابية مكونة من 7 حدود حيث:

$a=-13,\ s_7=245$

لدينا: $s_7=a+6d \Rightarrow 245=-13+6d \Rightarrow d=43$

إذن الأوساط الحسابية هي:

$$-13+43,\quad -13+2(43),\quad -13+3(43),\quad -13+4(43),\quad -13+5(43)$$

أي: $30, 73, 116, 159, 202$

٢,١. المتتابعات الهندسية

المتتابعة $\{s_n\}$ التي تحقق الشرط:

$$s_1 = a, \quad s_{n+1} = s_n \times r \qquad \forall n \in N$$

حيث a, r عددان ثابتان تسمى متتابعة هندسية ويسمى العدد r النسبة العامة للمتتابعة أو أساس المتتابعة الهندسية. أساس المتتابعة الهندسية هو النسبة بين أي حدين متعاقبين في المتتابعة:

$$r = \frac{s_2}{s_1} = \frac{s_3}{s_2} = \frac{s_4}{s_2} = \ldots = \frac{s_n}{s_{n-1}}$$

من التعريف السابق نحصل على:

$$s_1 = a\ ,\ s_2 = s_1 \times r = ar\ ,\ s_3 = s_2 \times r = ar^2,\ \ s_4 = s_3 \times r = ar^3$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة نستنتج الحد النوني s_n للمتتابعة الهندسية: $s_n = a r^{n-1}$

مثال ١٠: المتتابعات التالية هي متتابعات هندسية:

1) $3, 6, 12, 24, \ldots$

متتابعة هندسية حيث $a = 3$ والأساس $r = 2$

2) $1, 4, 16, 64, \ldots$

متتابعة هندسية حيث $a = 1$ والأساس $r = 4$

3) $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

متتابعة هندسية حيث $a = -1$ والأساس $r = -\frac{1}{3}$

4) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ \frac{1}{27}, \ldots$

متتابعة هندسية حيث $a = 1$ والأساس $r = \frac{1}{3}$

5) $8, 2, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{8}, \ldots$

متتابعة هندسية حيث $a = 8$ والأساس $r = \frac{1}{4}$

مثال ١١: أوجد الحد العاشر في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول يساوي 12.8 وحدها الثاني يساوي 6.4

الحل:

$a = 12.8$ والأساس $r = \frac{s_2}{s_1} = \frac{6.4}{12.8} = \frac{1}{2}$

الحد العاشر: $s_n = ar^{n-1} \Rightarrow s_{10} = ar^9 = 12.8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0.25$

مثال ١٢: أوجد الحد العاشر في المتتابعة الهندسية: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

الحل:

$a = \frac{1}{8}$ والأساس $r = \frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{4} = 2$

الحد العاشر: $s_n = ar^{n-1} \Rightarrow s_{10} = ar^9 = \frac{1}{8} \times 2^9 = 64$

مثال ١٣: أثبت أن $\frac{1}{243}$ هو أحد حدود المتتابعة: $27, 9, 3, \dots$

الحل:

$a = 27$ والأساس $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

نفرض أن: $s_n = \frac{1}{243}$ بما أن $s_n = ar^{n-1}$

إذن: $\frac{1}{243} = 27\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^5} = 3^3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

إذا تساوت الأساسات تتساوى الأسس ومنه $8 = n - 1$

أي أن $n = 9$ وبذلك يكون $\frac{1}{243}$ هو الحد التاسع من حدود المتتابعة الهندسية السابقة.

١,٢,١. الأوساط الهندسية

الأوساط الهندسية بين العددين a, b هي حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a ، وحدها الأخير b

إذا كان a, b حدين من متتابعة هندسية بينهما وسط هندسي واحد c فإن: a, c, b متتابعة هندسية

بفرض أن $ab > 0$ فإن: $\frac{c}{a} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c^2 = ab \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{ab}$

مثال ١٤: أدخل وسطين هندسيين بين: $-7, \frac{189}{8}$

الحل:

بإدخال الوسطين الهندسيين نحصل على متتابعة مكونة من 4 حدودها فيها $a = -7, S_4 = \frac{189}{8}$

لدينا: $s_n = ar^{n-1} \Rightarrow S_4 = \frac{189}{8} = -7r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{-27}{8} = \left(\frac{-3}{2}\right)^3$

إذا تساوت الأسس تتساوى الأساسات ومنه: $r = -\frac{3}{2}$

وتكون الأوساط الهندسية هي: $(-7)\left(\frac{-3}{2}\right),\ (-7)\left(\frac{-3}{2}\right)^2$ أي $\frac{21}{2}, -\frac{63}{4}$

تمارين

تمرين ١:

a) في المسائل التالية اكتب الحدود الخمسة الأوائل لكل متتابعة ثم مثلها بيانيا:

$$1)\ \{2n+1\} \qquad 2)\ \{n^2-1\} \qquad 3)\ \{(-1)^n n\} \qquad 4)\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\} \qquad 5)\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

b) في المسائل التالية استنتج الحد النوني للمتتابعة بمعرفة الحدود الأربعة الأولى منها:

$$6)\ 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots \qquad 7)\ 1,-1,\ 1,-1,\ldots \qquad 8)\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},\ -1,\ldots$$

$$9)\ a, ar, ar^2,\ ar^3,\ldots \qquad 10)\ a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots$$

c) اكتب الحدود الخمسة الأوائل للمتتابعة $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ثم مثلها بيانيا.

تمرين ٢:

في المسائل التالية أوجد الحد المطلوب في المتتابعة المعطاة:

s_n في $1,\ 0,\ -1,\ldots$

a) s_n في $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ 0,\ldots$

b) s_n في $2x-3,\ 2x-1,\ 2x+1,\ldots$

c) s_{18} في $-8,\ -3,\ 2,\ldots$

d) s_{10} في $x+2y,\ 3x+y,\ 5x+4y,\ldots$

e) s_{13} في $\frac{x}{y},\frac{x^2}{y},\frac{x^3}{y},\ldots$ حيث $x\neq 0,\ y\neq 0$

f) S_{21} في $\frac{1}{5^4},\frac{1}{5^3},\frac{1}{5^2},\ldots$

تمرين ٣:

1) كم عددا محصورا بين 200 و 1350 ويقبل القسمة على 14.

2) أدخل الأوساط المطلوبة فيما يلي:

a) أربعة أعداد بين 32 و 243 بحيث تشكل مع هذين الحدين متتابعة هندسية.

b) وسطا حسابيا بين 73 − ,83 بحيث يشكل مع هذين الحدين متتابعة هندسية.

c) خمسة أعداد (أوساط حسابية بين العددين 4.25, $2.25-$ بحيث تشكل الأعداد السبعة متتابعة حسابية.

d) وسطا هندسيا بين $5, 20$ بحيث يشكل مع هذين الحدين متتابعة هندسية.

3) متتابعة حسابية حدها الرابع يساوي 18, وحدها السابع يساوي 27 أوجد الحد الثامن عشر فيها.

4) متتابعة حسابية حدها الثامن ينقص عن حدها الثالث بمقدار 20 ، والحد الثالث ضعف الحد الثامن فما هي المتتابعة وما قيمة كل من هذين الحدين؟

5) اقترض شخص من بنك مبلغ 3600 دولار, على أن يسدده على 40 قسطا تشكل متتابعة حسابية, ولكن الشخص توفي بعد أن دفع القسط الثلاثين وبقي عليه ثلث الدين, أوجد مقدار القسط الأول والأخير

6) متتابعة هندسية حدها الرابع يساوي 64 وحدها السابع يساوي -8. فما هي المتتابعة؟

7) متتابعة هندسية يزيد حدها الثالث عن حدها الثاني بمقدار 6 ويزيد حدها الرابع عن حدها الثاني بمقدار 18. فما هي هذه المتتابعة؟

٢. المتسلسلات المنتهية

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة منتهية مكونة من n حدا فإن مجموع حدودها:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

تسمى متسلسلة منتهية مكونة من n حدا.

يمكن كتابة الصيغة السابقة باستخدام الحد العام a_n للمتتابعة ورمز التجميع $\sum$ على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

مثال ١٥: اكتب المتسلسلة الآتية بطريقة مختصرة:

$$4 + 9 + 14 + \ldots + (5n-1)$$

الحل:

الحد العام في المتسلسلة هو $a_k = 5k - 1$ وتكون المتسلسلة هي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 5k - 1$$

مثال ١٦: باستخدام رمز التجميع $\sum$ اكتب المتسلسلة:

$$7 + 12 + 17 + 22$$

الحل:

واضح أن المتتابعة $7, 12, 17, 22$ هي متتابعة حسابية حدها الأول $a = 5$ والأساس $d = 5$

$$a_k = a + (k-1)d \Rightarrow a_k = 7 + (k-1)5 = 5k + 2$$

إذن المتسلسلة المعطاة هي: $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{4} 5k + 2$

مثال ١٧: اكتب المتسلسلة الآتية بصورة صريحة:

$$\sum_{k=1}^{5} 2 \times 3^k$$

الحل:

بالتعويض عن قيم k بالأعداد $1, 2, 3, 4, 5$ فإن المتسلسلة المعطاة هي:

$$2\times 3^1 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 = 6 + 48 + 54 + 162 + 486$$

١,٢. المتسلسلة الحسابية أو الهندسية

تسمى المتسلسلة المنتهية $\sum_{k=1}^{n} a_k$ متسلسلة حسابية أو هندسية إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$ حسابية أوهندسية على الترتيب. فمثلا المتسلسلتان المذكورتان في المثالين 15 و 16 السابقين هما متسلسلتان حسابيتان، بينما المتسلسلة المذكورة في المثال الأخير17 هي متسلسلة هندسية. ومن الممكن إيجاد قانون لمجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية وللمتسلسلة الهندسية المنتهية كما يلي:

١,١,٢. المتسلسلة الحسابية المنتهية

لتكن $\sum_{k=1}^{n} a_k$ متسلسلة حسابية مكونة من n حدا ولتكن المتتابعة $\{a_n\}$حدها الأول a ، والأساس d ونفرض أن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (يرمز هنا ب S_n للمجموع وليس كما رمز سابقا للحد النوني للمتتابعة) فإن:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \tfrac{n}{2}(a + a_n)$$

والقانون السابق يعطي قيمة $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.بدلالة عدد الحدود n.والحد الأول a ، والحد الأخير a_n

مثال ١٨: أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية:

$\sum_{k=1}^{15} a_n$ علما بأن $a_6 = -4,\ a_{13} = 10$

الحل:

$$a_6 = a + 5d = -4,\ \ a_{13} = a + 12d = 10$$

بطرح حدي المتتابعة نحصل على

$$a_6 + a_{13} = a + 5d - (a + 12d) = -4 - 10 \Rightarrow -7d = -14 \Rightarrow d = 2$$

وبالتعويض في a_6 ينتج أن: $a + 10 = -4 \Rightarrow a = -14$

ومنه: $S_{15} = \sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{15}{2}(a + a + (15-1)d) = \frac{15}{2}(2a + 14d)$

$$\Rightarrow S_{15} = \sum_{k=1}^{15} a_k = \tfrac{15}{2}\big(2(-14) + 14(2)\big) = 0$$

مثال ١٩: أوجد عدد حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{n} a_n$ علما بأن:

$$a_1 = 13,\ a_n = -5,\ \sum_{k=1}^{n} a_n = 40$$

الحل:

لدينا: $\sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 40 = \frac{n}{2}(13 - 5)$

ومنه: $40 = 4n \Rightarrow n = 10$ فعدد حدود المتسلسلة هو 10

٢,١,٢. المتسلسلة الهندسية المنتهية

لتكن $\sum_{k=1}^{n} a_k$ متسلسلة هندسية مكونة من n حدا ولتكن المتتابعة الهندسية $\{a_n\}$ حدها الأول a ، والنسبة r ونفرض أن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ فإن:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

إذا كان $r = 1$ فإن المتسلسلة تصبح:

$$(n \text{ حدا})\ \ S_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \quad \Rightarrow S_n = na$$

إذن:
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\begin{cases}\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, & r\neq 1\\ na, & r=1\end{cases}$$

مثال ٢٠: احسب مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{10}2^k$

الحل:

لدينا:
$$\sum_{k=1}^{10}2^k=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$$

أي أن الحد الأول $a=2$ والنسبة $r=2$ وعدد الحدود $n=10$

من القانون السابق $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ حيث $r\neq 1$ نحصل على:
$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2(1024-1)=2046$$

مثال ٢١ : إذا كان الحد الرابع من متسلسلة هندسية يساوي 6 والحد التاسع يساوي 1458 أوجد الحد الأول والعاشر وكذلك مجموع الحدود العشرة الأولى.

الحل:

لدينا:
$$a_9=ar^8=1458,\ a_4=ar^3=6$$
$$\Rightarrow\frac{ar^8}{ar^3}=\frac{1458}{6}\Rightarrow r^5=3^5\Rightarrow r=3$$

ولدينا:
$$a_4=ar^3=6\Rightarrow a(3)^3=6\Rightarrow a=\frac{6}{27}$$

ومنه: $a=\dfrac{2}{9}$ الحد الأول

الحد العاشر:
$$a_{10}=ar^9=\frac{2}{9}(3)^9=2(3)^7=2(2187)\Rightarrow a_{10}=4374$$

مجموع الحدود العشرة الأولى:
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a(r^n-1)}{r-1},\quad r\neq 1$$
$$S_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{\frac{1}{2}(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{59048}{9}$$

مثال ٢٢: متسلسلة هندسية حدها الأخير يساوي $\frac{1}{32}$ وأساسها $\frac{1}{2}$، إذا كان مجموع حدودها يساوي $\frac{255}{32}$،

أوجد حدها الأول

الحل:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{255}{32}$$

لدينا: $ar^n = ar^{n-1}r = a_n r = \frac{1}{32}.\frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

ومنه: $\frac{255}{32} = \frac{\frac{1}{64} - a}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \frac{255}{32} = \frac{\frac{1}{64} - a}{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{255}{32} = -2\left(\frac{1}{64} - a\right) \Rightarrow \frac{255}{32} = -\frac{1}{32} + 2a \Rightarrow 2a = \frac{255}{32} + \frac{1}{32} = \frac{256}{32}$$

وبالتالي فإن الحد الأول هو: 4

مثال ٢٣: أوجد عدد حدود المتسلسلة $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-3}$ التي مجموعها $\frac{364}{9}$

الحل:

المتسلسلة المعطاة هي متسلسلة هندسية مجموعها $\frac{364}{9}$

لدينا: $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-3} = 3^{-2} + 3^{-1} + 3^{0} + \ldots + 3^{n-3} = \frac{364}{9}$

أي أن الحد الأول $a = 3^{-2}$ والنسبة $r = 3$ وعدد الحدود n

من القانون السابق $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ حيث $r \neq 1$ نحصل على:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3^{-2}(3^n - 1)}{3-1} = \frac{364}{9}$$

ومنه: $\frac{3^n - 1}{18} = \frac{364}{9} \Rightarrow 3^n - 1 = 728 \Rightarrow 3^n = 729 = 3^6$

إذن: $n = 6$ ، فعدد حدود المتسلسلة هو 6

تمارين

تمرين ١: أوجد مجموع المتسلسلة في كل من ما يلي:

1) $\sum_{k=1}^{5}(2k-5)$	4) $\sum_{k=1}^{5}3^k$	7) $\sum_{n=1}^{9}15\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$
2) $\sum_{k=1}^{30}(3k+1)$	5) $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$	8) $\sum_{k=1}^{6}9^k$
3) $\sum_{k=1}^{100}(2k-1)$	6) $\sum_{k=1}^{8}2^{k-1}$	9) $\sum_{k=1}^{8}\left(2^k+2k-1\right)$

تمرين ٢:

a) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{19}a_k$ علما بأن $a_3=130,\ a_{19}=116$

b) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{5}a_k$ علما بأن $a_3=\frac{1}{3},\ a_5=9$

c) أوجد عدد حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{n}(3k+5)$ التي مجموعها ٢١٥

d) أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث: $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k=\frac{195}{16}$

e) أوجد المتتابعة الحسابية المكونة من ثلاثة حدود علما بأن مجموعها 48 ومجموع مربعات حدودها 800

f) أوجد المتتابعة الحسابية المكونة من ثلاثة حدود علما بأن مجموعها 21 وحاصل ضرب حدودها 280.

g) أوجد مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على خمسة بين العددين 54 ، 718.

h) مجموع أول 40 حدا من متتابعة حسابية هو 430 ومجموع أول 60 حدا هو 945 أوجد الحد العاشر لهذه المتتابعة.

i) متتابعة هندسية حدها الأول 3 والأخير 48 فإذا كان كل حد هو ضعف الحد الذي يسبقه فأوجد مجموعها.

j) أوجد المتتابعة الهندسية المكونة من ثلاثة حدود علما بأن مجموعها 42 وحاصل ضرب حدودها 512.

k) إذا كان الحد الثالث من متتابعة هندسية 144 وكان الحد السادس 486 فأوجد مجموع أول خمسة حدود لها.

l) ما عدد حدود المتسلسلة الهندسية: $64 + 32 + 16 + + \ldots + \frac{1}{256}$

m) رتبت مقاعد مسرح في 25 صفا يحتوي الصف الأول على 20 مقعدا, والصف الثاني على 21 مقعدا والثالث على 22 مقعدا وهكذا, أوجد عدد المقاعد في المسرح.

الفصل الثاني

طرق العد

مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل إلى بعض طرق تحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة ما أو عدد العناصر في مجموعة معينة بغير طريقة العد المباشر, وتسمى هذه الطرق بالتمثيل التوافقي.

١. القاعدة الأساسية للعد

a) إذا أجريت تجربة ما بعدد من الطرق مقدارها a وتجربة أخرى بعدد من الطرق مقدارها b فإن التجربتين يمكن أن تحدثا معا بعدد من الطرق مقداريهما : $a \times b$

b) إذا كان لدينا عدة تجارب كل منها يمكن أن يحدث بعدد من الطرق مقدارها $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ على الترتيب فإن هذه التجارب يمكن أن تتم معا بعدد من الطرق مقدارها :

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n$$

مثال١: أوجد عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها ثلاثة كتب مختلفة فوق المكتب.

الحل :

عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها الكتاب الأول ثلاثة طرق مختلفة إما من اليمين وإما على اليسار أو في الوسط, لنفرض أننا اخترنا مكان للكتاب الأول فإنه يبقى لنا مكانان وبالتالي فالكتاب الثاني يمكن أن نرتبه بطريقتين فقط, وإذا افترضنا أننا اخترنا مكانا للكتاب الثاني فإنه يبقى لدينا مكان واحد فقط وبالتالي فإن الكتاب الثالث يمكن أن نرتبه بطريقة واحدة فقط.

إذن عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها الكتب الثلاثة هي: $3 \times 2 \times 1 = 6$

١,١. مضروب n

حاصل ضرب الأعداد الطبيعية من 1 إلى n يسمى مضروب n Factorial ويرمز له بالرمز $n!$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

وهو عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها n من الأشياء

مثال٢: احسب ما يلي:

$1! = 1$, $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$, $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, $\quad 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, $\quad 6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

يمكن كتابة $n!$ على الصورة التالية:

$n!=[1.2.3\ldots(n-1)].n=[(n-1)!]\times n$ أو $n!=n(n-1)!$

تسمى هذه المعادلة صيغة الاختزال لمضروب n

إذن: $9!=9(8!),\quad 23!=23(22!)$

يمكن تطبيق هذه الصيغة لنحصل على:

$$\begin{aligned}n! &= n(n-1)!\\ &= n(n-1)(n-2)!\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)!\end{aligned}$$

وهكذا: $n!=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!$

إذا وضعنا $n=1$ في صيغة الاختزال نحصل على:

$1!=1(0!)$ أو $1=0!$

لذلك يجب أن نعرف أن: $0!=1$

وذلك حتى تكون صيغة الاختزال صحيحة لجميع الأعداد الطبيعية بما فيها $n=1$

٢. التباديل

لنعتبر مجموعة مكونة من n من الأشياء المختلفة فإن عدد طرق اختيار أشياء عددها r منها واحدا تلو الآخر دون إحلال (أي أن العنصر الأول لا يتم إحلاله قبل اختيار الثاني، ولا يتم إحلال العنصرين الأوليين قبل اختيار الثالث وهكذا.) يسمى الاختيار بهذه الطريقة **تبديلاً** Permutation أو اختياراً مرتباً. ونرمز له بالرمز $_nP_r$. ومنه فإنه يمكن اختيار العنصر الأول بطرق عددها n. ولكن حيث إنه لا يتم إحلال العنصر الأول، فإنه يوجد عناصر عددها $n-1$ فقط من بينها يمكن اختيار العنصر الثاني. إذن العنصر الثاني يمكن اختياره بطرق عددها $n-1$. بالمثل، العنصر الثالث يمكن اختياره بطرق عددها $n-2$ حال اختيار العنصرين الأوليين، وهكذا.

العنصر الأخير (أي الرائي) يمكن اختياره بطرق عددها $n-(r-1)=n-r+1$

إذن $_nP_r$ عدد التباديل لأشياء عددها r من بين أشياء عددها n يعطى بحاصل الضرب

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)$$

مثال٢: احسب ما يلي:

$$_8P_3=8(8-1)(8-2)=8(7)(6)=336$$
$$_{15}P_2=15(15-1)=15(14)=210$$
$$_4P_2=4(4-1)=4(3)=12$$

يمكن التعبير عن ${}_nP_r$ باستخدام المضروب كما يلي:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملاحظة بوضع $r = n$ نحصل على النتيجة التالية

$$_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

مثال٣ : احسب ما يلي:

$$_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{3!} = 336$$

$$_{15}P_2 = 15 \times 14 = \frac{15!}{2!} = 210$$

$$_4P_2 = 4 \times 3 = \frac{4!}{2!} = 12$$

مثال٤ : بكم طريقة يمكن اختيار أشخاص للاشتراك في خمسة اختبارات مختلفة من مجموعة مكونة من ثمانية أشخاص ؟

الحل:

الترتيب الذي يتم به اختيار الأشخاص الخمسة مهم جدا لأن جميع الاختبارات مختلفة. ومنه فإن عدد الطرق التي يمكن أن يتم بها الاختيار هو إذن عدد التباديل:

$$_8P_5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

مثال٥ : لنفرض أننا نريد اختيار ثلاثة أشخاص من بين أربعة للمشاركة في الاختبارات. بكم طريقة يمكن إجراء الاختيارات؟

الحل:

لنرمز للأفراد الأربعة بالحروف a,b,c,d . إذا كان الترتيب الذي يتم به الاختيار هام فإن عدد الاختيارات يساوي $_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ ويمكننا عمل قائمة بالاختيارات الأربع والعشرين هذه كما يلي:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
$abd, adb, bad, bda, dab, dba$
$acd, adc, cad, cda, dac, dca$
$bcd, bdc, cbd, cdb, dcb, dbc$

نلاحظ في هذه القائمة أن كل مجموعة من ثلاثة أشخاص تظهر ست مرات مناظرة للطرق الست المختلفة التي يمكن أن يتم بها ترتيب هذه العناصر الثلاث إذا كان الترتيب الذي يتم به اختيار الثلاث عناصر غير مهم، فإن كل هذه التباديل الست لكل مجموعة تكافىء كل منها الآخر،
فعلى سبيل المثال، abc تكافىء acb أو bac ، وهكذا. عندما يكون الترتيب غير مهم فإن عدد الاختيارات المختلفة يساوي أربعة فقط مناظرة للصفوف الأربعة المكتوبة أعلاه.

٣. التوافيق

إن اختيار عناصر عددها r من بين عناصر عددها n ، إذا كان ترتيب الاختيار غير مأخوذ في الاعتبار. يسمى كل اختيار من هذه الاختيارات توفيقا لعناصر عددها r من عناصر عددها n ، وعدد التوفيق يرمز له بالرمز: $_nC_r = \binom{n}{r}$.

أي تبديل لعناصر عددها r من بين عناصر عددها n يمكن الحصول عليه بأن نقرر أولا أي العناصر (عددها r) سنختار ثم ترتيب هذه العناصر (عددها r) بترتيب مناسب.
عدد التباديل $_nP_r$ يكون إذن مساويا لعدد طرق اختيار توافيق معينة لعناصر عددها r من بين عناصر عددها n مضروبا في عدد الطرق التي يمكن بها تنظيم كل توفيق بترتيب معين. أي أن،

$$_nP_r = \binom{n}{r} \times N(r)$$

حيث $N(r)$ هو عدد التنظيمات المرتبة للعناصر المختارة وعددها r. ولكن $N(r)$ يجب أن يساوي $_rP_r = r!$ أي عدد التباديل لعناصر عددها r من بين r عنصر.

إذن:

$$_nP_r = \binom{n}{r} r!$$

وبالتالي فإن:

$$\binom{n}{r} = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

يمكننا أيضا كتابة عدد التوافيق على الصورة:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1).....(n-r+1)}{r(r-1).....2.1}$$

لاحظ أن كلا من البسط والمقام في هذا الكسر يحتوي على أعداد صحيحة متعاقبة عددها r كمعاملات.

مثال ٦: احسب ما يلي:

$$a)\binom{8}{3}=\frac{8(8-1)(8-2)}{3(3-1)(3-2)}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56 \qquad b)\binom{7}{5}=\frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

في الحالة الأولى يوجد ثلاثة عوامل في كل من البسط والمقام، بينما في الحالة الثانية يوجد خمسة عوامل.

ملاحظات

هذه الخاصية الثانية يمكن تفسيرها كما يلي.

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1\,.$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$ لجميع قيم r

عندما يتم اختيار أي مجموعة من أشياء عددها r من بين أشياء عددها n ، فإن عدد الأشياء المتروكة دون اختيار يساوي $(n-r)$. عدد طرق اختيار أشياء عددها r يجب إذن أن يساوي عدد طرق تحديد الأشياء التي لن تختار وعددها $(n-r)$ ولكن يمكننا اختيار المجموعة المكونة من $(n-r)$ من العناصر بطرق عددها $\binom{n}{n-r}$ طريقة، وبالتالي فإن هذا يجب أن يساوي $\binom{n}{r}$ (يمكننا أيضا إثبات هذه النتيجة مباشرة باستخدام الصيغة التي تعبر عن $\binom{n}{r}$ بدلالة المضروبات).

مثال ٧: احسب ما يلي:

$$a)\binom{7}{5}=\binom{7}{7-5}=\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21 \qquad b)\binom{50}{48}=\binom{50}{50-48}=\binom{50}{2}=\frac{50\times49}{2\times1}=25\times49=1225$$

$$c)\binom{20}{17}=\frac{20!}{(20-17)!17!}=\frac{20\times19\times18\times17!}{3!17!}=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=20\times19\times3=1140$$

$$d)\binom{16}{10}=\frac{16!}{(16-10)!10!}=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11\times10!}{6!10!}=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=8008$$

مثال ٨: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من بين 25 طالب لإرسالهم في بعثة دراسية ؟

الحل:

واضح هنا أن تريب الطلاب غير مهم وبالتالي عدد طرق الاختيارات يعطى بعدد التوافيق $\binom{25}{4}$

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{(25-4)!4!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21!}{21!4!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 12650$$

لنلخص كل النتائج السابقة أعلاه في النظرية التالية.

نظرية

اختيار عناصر عددها r من مجموعة معطاة مكونة من عناصر مختلفة عددها n ، فإن عدد:

a) الاختيارات مع الإحلال تساوي n^r.

b) الاختيارات بدون إحلال تساوي $_nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

c) التوافيق تساوي $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

مثال ٩: إذا اختيرت ثلاث أوراق من مجموعة أوراق لعب مكونة من اثنتين وخمسين ورقة, واحدة فواحدة مع الإحلال. فكم عدد الاختيارات؟

الحل:

يمكن اختيار ثلاثة أوراق واحدة فواحدة مع الإحلال بطرق عددها:

$$n^r = 52 \times 52 \times 52 = 52^3$$

مثال ١٠: دخل خمسة أشخاص غرفة بها عشرة كراسي بكم طريقة يمكنهم الجلوس؟

الحل:

حيث إن الترتيب مهم فإن عدد الطرق يعطى بعدد التباديل $_{10}P_5$

$$_{10}P_5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

مثال ١١: كم عدد يمكن تكوينه من الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 بحيث يكون كل عدد مركب من ثلاثة أرقام مختلفة؟

الحل:

كما في المثال السابق الترتيب مهم لأن مثلا $123 \neq 132 \neq 231 \neq .....$ فإن عدد الطرق يعطى بعدد التباديل $_7P_3$

$$_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

مثال ١٢: كيس يحتوي على 10 كرات. يراد سحب ثلاث كرات من الكيس واحدة بعد الأخرى، أوجد عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها الكرات الثلاث.

a) السحب مع الإحلال (الإرجاع) b) السحب دون الإحلال

الحل:

a) السحب مع الإحلال

كل كرة يمكن اختيارها بطرق عددها 10 إذن عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها الكرات الثلاث هي: $10^3 = 1000$

b) السحب دون الإحلال

الكرة الأولى يمكن اختيارها بطرق عددها 10، الكرة الثانية يمكن اختيارها بطرق عددها 9 و الكرة الثالثة يمكن اختيارها بطرق عددها 8. إذن عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها الكرات الثلاث .هي $10 \times 9 \times 8 = 720$ وهي عدد التباديل:

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

مثال ١٣: بكم طريقة يمكن اختيار طالبين من بين 8 طلاب لتكوين لجنة تشرف على النشاط الثقافي

الحل:

حيث أن الترتيب غير مهم فإن عدد الطرق التي يتم بها الخيارات تعطى بعدد التوافيق $\binom{8}{2}$

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

٤. نظرية ذات الحدين

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً و a,b أعداد حقيقية فإن:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-k}b^k = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

نماذج لمفكوك ذات الحدين لما $n=1, n=2, n=3, n=4$

$$(a+b) = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ملاحظات نلاحظ في هذه المفكوكات ما يلي:

a) عدد الحدود في كل مفكوك يزيد واحدا عن الأس في الطرف الأيمن.

b) الحد الأول في المفكوك هو العدد a مرفوعا لنفس الأس في الطرف الأيمن, ثم ينقص الأس للعدد a في الحدود التالية بمقدار الوحدة في كل مرة.

c) العدد b يبدأ ظهوره في الحد الثاني, ثم يزيد أس العدد b بمقدار الوحدة على التوالي.

d) مجموع الأسين للعددين b, a في أي حد من حدود المفكوك ثابت, و يساوي الأس في الطرف الأيمن.

e) معامل الحد الأول في المفكوك يساوي معامل الحد الأخير ويساوي الواحد, ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير وهكذا.

مثال ١٤: اكتب مفكوك $(a+b)^5$

الحل:

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{r}a^{5-k}b^k = a^5 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

مثال ١٥: اكتب مفكوك $(1+2b)^4$

الحل:

$$(1+2b)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{r}(2b)^k = 1 + \binom{4}{1}2b + \binom{4}{2}(2b)^2 + \binom{4}{3}(2b)^3 + (2b)^4$$
$$= 1 + \binom{4}{1}2b + \binom{4}{2}2^2b^2 + \binom{4}{3}2^3b^3 + 2^4b^4$$
$$= 1 + (4)2b + (6)2^2b^2 + (4)2^3b^3 + 2^4b^4 == 1 + 8b + 24b^2 + 32b^3 + 16b^4$$

مثال ١٦: احسب قيمة $(1.03)^{10}$ مقربة لثلاثة أرقام عشرية

الحل:

لدينا: $1.03 = 1 + 0.03$ ومنه:

$$(1+0.03)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(0.03)^k = 1 + \binom{10}{1}\frac{3}{10^2} + \binom{10}{2}\left(\frac{3}{10^2}\right)^2 + \ldots + \binom{10}{k}\left(\frac{3}{10^2}\right)^k + \ldots + \left(\frac{3}{10^2}\right)^{10}$$

$$= 1 + \binom{10}{1}\frac{3}{10^2} + \binom{10}{2}\frac{3^2}{10^4} + \ldots + \binom{10}{k}\frac{3^k}{10^{2k}} + \ldots + \frac{3^{10}}{10^{20}}$$

$$= 1 + 0.03 + 0.0405 + 0.00324 + 0.0001701 + \ldots \cong 1.3439101 \cong 1.344$$

توقفنا في الفك عند الحد الخامس لظهور ثلاثة أصفار عن يمين الفاصلة العشرية, حيث إن المطلوب التقريب لثلاثة أرقام عشرية.

مثال ١٧: اكتب الحد العاشر من مفكوك $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^{13}$, حيث $x \neq 0$

الحل:

الحد العاشر هو:

$$\binom{13}{9}(x^2)^{13-9}\left(\frac{1}{2x}\right)^9 = \binom{13}{4}x^8\frac{1}{2^9x^9}$$

$$= \frac{13\times12\times11\times10}{4\times3\times2\times1}\frac{1}{2^9x} = \frac{715}{512}x^{-1}$$

تمارين

1)احسب ما يلي:

$a)\ {}_{15}P_5$	$b)\ {}_{27}P_{18}$	$c)\ {}_{32}P_{17}$	$d)\ {}_{37}P_{15}\times{}_{37}P_{13}$
$e)\ {}_{10}P_3\div{}_{10}P_2$	$f)\ {}_{12}C_5$	$g)\ {}_{27}C_{18}$	$h)\ {}_{32}C_{17}$
$i)\ {}_{37}C_{15}\times{}_{37}C_{13}$	$j)\ {}_{10}C_3\div{}_{10}C_2$	$k)\ {}_{37}P_{15}\times{}_{37}C_{13}$	$l)\ {}_{10}P_3\div{}_{10}C_3$

2)يحتوي كيس على عشر كرات

a) أوجد عدد الطرق التي يمكن بها سحب أربع كرات واحدة بعد الأخرى مع الإحلال.

b) أوجد عدد الطرق التي يمكن بها سحب أربع كرات على التوالي ودون إرجاع.

3) كم عددا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، إذا كان:

a) التكرار مسموح

b) التكرار غير مسموح، وبحيث يكون أي عدد أقل من ٥٠٠٠.

4) يختار اللاعب في لعبة البوكر خمس ورقات من بين أوراق الشدة العادية (52 ورقة)

a) بكم طريقة يمكن أن يحصل على أربع ورقات من النفس الرقم أو الصورة ؟

b) بكم طريقة يمكن أن يحصل اللاعب على خمس ورقات متتالية بالترتيب ومن نفس الشكل؟

c) بكم طريقة يمكن أن يحصل اللاعب على خمس ورقات متتالية بالترتيب ولكنها ليست من نفس الشكل ؟

5) بكم طريقة يمكن تشكيل مجلس إدارة من خمسة أشخاص إذا كان لابد من اختيار شخص معين في جميع الأحوال؟

6) عرض عليك أحد العاملين بإحدى شركات التأمين عشر وثائق من وثائق تأمين السيارات , بكم طريقة يمكنك اختيار وثيقتين مختلفتين.

7) يراد تكوين لجان في الكلية التقنية بالرياض, بحيث يكون بكل لجنة طالب من كل قسم الأقسام العشرة التي عدد الطلاب في كل منها 300. كم لجنة يمكن تكوينها؟

8) 25 موظف في مؤسسة بها خمسة أبواب، بكم طريقة يمكنهم الدخول للمؤسسة؟

9) حديقة عامة لها خمسة أبواب، بكم طريقة يستطيع فرد أن يدخل ويخرج

a) من باب مختلف؟ b) من أي باب؟

10) استضاف رئيس شركة ثلاثة مسؤولين وأربعة عمال، وجلسوا للاجتماع على طاولة دائرية، بحيث يجلس المدير على كرسي معين، وبجانبه مسؤول فعامل، وهكذا، بكم طريقة يمكن للمجموعة الجلوس؟

11) ثماني نقاط كل ثلاث منها ليست على استقامة واحدة. كم قطعة مستقيمة يمكن رسمها بين هذه النقاط؟ وكم مثلثا يمكن تعيينه؟

12) تسع قطع من العملات قذفت آنياً، فبكم طريقة يمكن أن تظهر بها 4 قطع متفقة في أحد الوجهين، بينما تتفق خمس في الوجه الآخر؟

13) مجلس إدارة يتكون من 12 شخاصاً، بكم طريقة يمكن أخذ قرار باتفاق 8 أعضاء ضد 4؟

14) يراد تقسيم 10 كتب مختلفة بين طالبين a,b، بحيث يعطى الأول 6 كتب، والثاني 4 كتب. بكم طريقة يتم هذا التقسيم؟

15) أوجد مفكوك $\left(x+2x^2\right)^7$.

16) أوجد مفكوك $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^5$ حيث $y \neq 0$

17) أوجد الحد الحادي عشر من مفكوك $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{3}\right)^{15}$، حيث $x \neq 0$

18) أوجد الحد التاسع من مفكوك $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{8}{x}\right)^{17}$، حيث $x \neq 0$

19) أوجد الحد الذي يحتوي على x^8 في مفكوك $(2x^2-\dfrac{1}{2}y^3)$

المراجع

١) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ -١٩٨٣م.

٢) علي عبد الله الدفاع، نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات، دار جون وايلي وأبناؤه، نيويورك، ١٩٨٧م.

3) Gwyn Davies and Gordon Hick, Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.

4) Anders Hald, A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, John Wiley and Sons, New York, 1989.

5) Alexander Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.

6) Seymour Lipschutz and Marc Lipson, Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.

7) Peter Tebbutt, Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS